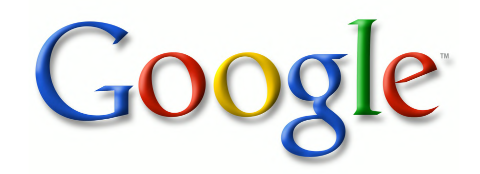
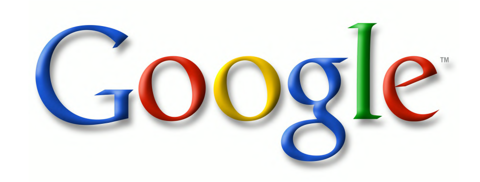
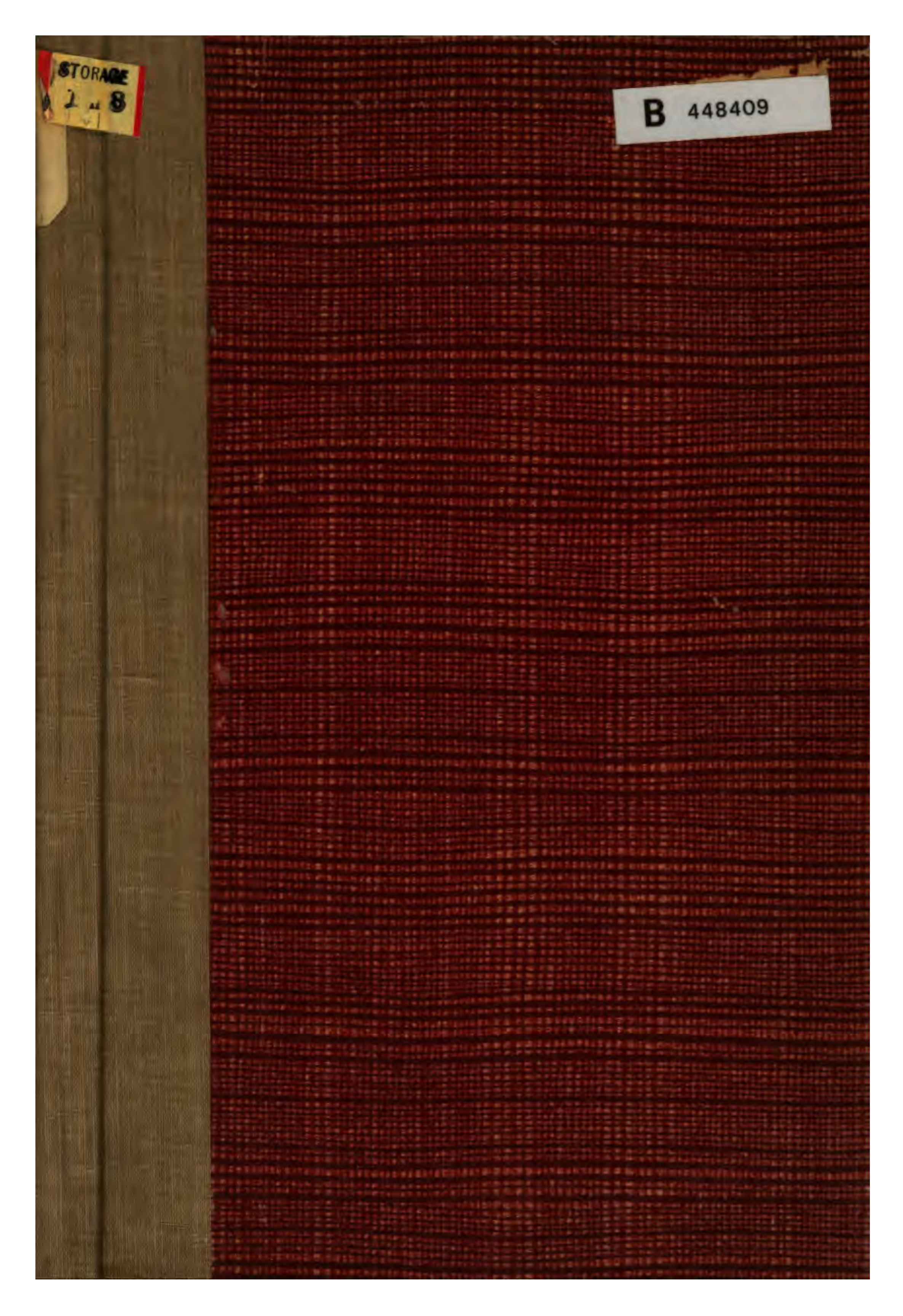
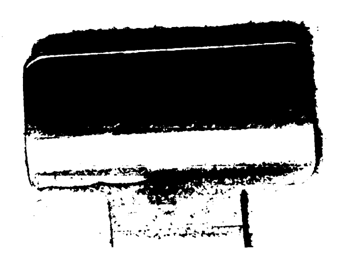



Google


STORAGE
B 448409




1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



A Monsieur
Gerono
Hommage respectueux
Nicolaïdès

THÉORIE DU MOUVEMENT

D'UNE FIGURE PLANE

DANS SON PLAN.

APPLICATION

AUX ORGANES DES MACHINES.

1er MÉMOIRE.

PAR N. NICOLAÏDÈS,

Sous-lieutenant du génie de l'armée hellénique.
Élève externe de l'École des ponts et chaussées, licencié ès sciences.

PARIS.

LEIBER, LIBRAIRE-ÉDITEUR,

RUE DE SEINE-SAINT-GERMAIN, 13.

1863

THÉORIE DU MOUVEMENT

D'UNE FIGURE PLANE

DANS SON PLAN.

APPLICATION

AUX ORGANES DES MACHINES.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Ce, rue Racine, 26.

Alexander Ziwet

THÉORIE DU MOUVEMENT

D'UNE FIGURE PLANE

DANS SON PLAN.

APPLICATION

AUX ORGANES DES MACHINES.

1[er] MÉMOIRE.

PAR N. NICOLAÏDÈS,
Sous-lieutenant du génie de l'armée hellénique,
Élève externe de l'École des ponts et chaussées, licencié ès sciences.

PARIS.
LEIBER, LIBRAIRE-ÉDITEUR,
RUE DE SEINE-SAINT-GERMAIN, 13.

1863

[illegible]

THÉORIE DU MOUVEMENT

D'UNE FIGURE PLANE

DANS SON PLAN.

Je me propose d'établir quelques formules dont l'emploi pourrait être utile pour l'étude du mouvement d'une figure dans son plan (*).

Considérons un système d'axes rectangulaires, $O'x'$, $O'y'$, tracés sur un plan P, mobile suivant une loi quelconque, sur un plan Q, fixe ; soient :

a, b, les coordonnées de l'origine mobile O', par rapport à deux axes fixes Ox, Oy, rectangulaires et arbitrairement choisis sur le plan Q ;

α, l'angle $(\widehat{xx'})$.

Les formules de transformation des coordonnées sont :

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,\\ y &= b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}$$

(*) Pour l'histoire de cette question, je renverrai le lecteur à la préface de l'excellent ouvrage de M. Resal, *Traité de cinématique pure*, chez Mallet-Bachelier.

D'ailleurs, la nature du mouvement fournira deux équations de condition, soit :

$$(2)\qquad \begin{aligned} F\,(a,b,\alpha) &= 0, \\ F'\,(a,b,\alpha) &= 0. \end{aligned}$$

On aura l'équation de la courbe tracée sur le plan Q, par un point ($x' = A$, $y' = B$) du plan P, en éliminant a, b, α, entre les équations (1), (2), après avoir remplacé dans ces dernières, x', y' par leurs valeurs A, B.

Centre instantané de rotation. Ce point est donné, sur le plan mobile, par les équations

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{da}{d\alpha} - x'_1 \sin\alpha - y'_1 \cos\alpha &= 0, \\ \frac{db}{d\alpha} + x'_1 \cos\alpha - y'_1 \sin\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Elles expriment que les déplacements infiniment petits du point (x'_1, y'_1) sont nuls. Les équations (1), (3) donnent

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{da}{d\alpha} - (y_1 - b) &= 0, \\ \frac{db}{d\alpha} + (x_1 - a) &= 0; \end{aligned}$$

x_1, y_1 sont les coordonnées du centre instantané relativement aux axes fixes (*). En éliminant a, b, α entre les

(*) Pour trouver le centre de rotation, quand il s'agit d'un déplacement fini d'une figure, il faut faire dans les équations (1) $x' = x$, $y' = y$, ce qui donne

$$\begin{aligned} y \sin\alpha + x(1 - \cos\alpha) - a &= 0 \\ -x \sin\alpha + y(1 - \cos\alpha) - b &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations représentent les bissectrices des angles $(\widehat{xx'})$, $(\widehat{yy'})$.

équations (2), (3), on aura le lieu des centres instantanés sur le plan mobile ; de même l'élimination de ces quantités entre (2), (4) donnera la courbe des centres instantanés sur le plan fixe. Je désignerai dorénavant ces courbes par les lettres M, F. Les équations (1), (4) donnent pour tout point du plan mobile

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{db}{d\alpha}+(x-a)}{\frac{da}{d\alpha}-(y-b)}=-\frac{x-x_1}{y-y_1};$$

donc les normales aux courbes décrites pendant le mouvement par les divers points, passent par le centre instantané.

Cherchons maintenant l'enveloppe d'une courbe

$$(5) \qquad \varphi(x', y')=0$$

située sur le plan P, et mobile avec lui. Pour cela il faut remplacer dans l'équation ci-dessus x', y' par leurs valeurs tirées des équations (1), puis différentier par rapport à une des variables a, b, α en considérant x, y comme constantes, on aura de cette manière

$$\frac{d\varphi}{dx'}\frac{dx'}{d\alpha}+\frac{d\varphi}{dy'}\frac{dy'}{d\alpha}=0,$$

ou bien

$$(6) \quad \frac{d\varphi}{dx'}\left(y'-\cos\alpha\frac{da}{d\alpha}-\sin\alpha\frac{db}{d\alpha}\right)+\frac{d\varphi}{dy'}\left(-x'-\cos\alpha\frac{db}{d\alpha}-\sin\alpha\frac{da}{d\alpha}\right)=0.$$

L'élimination de a, b, α, x', y' entre (6), (1), (2), (5) donnera une relation entre x et y, qui sera précisément l'équation de la courbe cherchée.

L'équation (6) représente une ligne droite passant par le centre instantané ; elle coupe normalement l'enveloppée (5), ce qui prouve que le point-enveloppe se trouve à chaque instant sur la normale abaissée du centre instantané sur l'enveloppée.

Centre instantané des accélérations. M. Bresse, dans un mémoire qui se trouve inséré dans le 35e cahier du *Journal de l'École polytechnique*, a donné une excellente méthode pour déterminer le rayon de courbure des roulettes. Voici le principal théorème de son mémoire. Le point qu'il nomme centre instantané des accélérations (*), est donné par les équations

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{d^2a}{d\alpha^2}-(x_2-a)=0,\\ &\frac{d^2b}{d\alpha^2}-(y_2-b)=0; \end{aligned}$$

or les équations (1) donnent

$$\frac{dy}{d\alpha}=-x_1+x,\qquad \frac{dx}{d\alpha}=y_1-y,$$

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2}=y_2-y,\qquad \frac{d^2x}{d\alpha^2}=x_2-x.$$

En remplaçant ces valeurs dans l'expression connue du rayon de courbure, on trouve

$$\rho=\frac{[(x_1-x)^2+(y_1-y)^2]^{\frac{3}{2}}}{(y_2-y)(y_1-y)+(x_2-x)(x_1-x)},$$

(*) M. Resal l'a nommé centre des accélérations géométriques, *Traité de cinématique pure*.

et en désignant par R, R_1 les distances du point (x, y) aux deux points $(x_1 y_1)$ et $(x_2 y_2)$ et par α l'angle $(\widehat{RR_1})$

$$(8) \qquad \rho = \frac{R^2}{R_1 \cos \alpha}.$$

Ce résultat constitue le théorème de M. Bresse.

Différentions les équations (4), il vient

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\frac{d^2a}{d\alpha^2} - \left(\frac{dy_1}{d\alpha} - \frac{db}{d\alpha}\right) = 0 \\ &\frac{d^2b}{d\alpha^2} + \left(\frac{dx_1}{d\alpha} - \frac{da}{d\alpha}\right) = 0, \end{aligned}$$

et ayant égard aux équations (4), (7)

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\frac{dy_1}{d\alpha} = x_2 - x_1, \\ &\frac{dx_1}{d\alpha} = - y_2 + y_1. \end{aligned}$$

Les mêmes opérations effectuées sur les équations (3) donnent

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\frac{dy'_1}{d\alpha} = x'_2 - x'_1 \\ &\frac{dx'_1}{d\alpha} = - y'_2 + y'_1. \end{aligned}$$

Voici l'interprétation géométrique des formules (10), (11). Les courbes que nous avons désignées par les lettres M, F se touchent à chaque instant, et le point de contact est le centre instantané de rotation, donc M roule sur F sans glisser pendant le mouvement. Le centre des accélérations se trouve sur la normale commune à ces courbes et

sa distance au point de contact est

$$D = \frac{\rho_F \rho_M}{\rho_F \pm \rho_M}. \tag{12}$$

ρ_F, ρ_M sont les rayons de courbure des courbes F, M; on prendra le signe moins, si les centres de courbure de deux courbes se trouvent du même côté de la tangente commune, et le signe plus dans le cas contraire. Pour démontrer la formule (12), je différentie trois fois de suite les équations (1), il vient en égalant à zéro les seconds membres

$$\begin{aligned} &\frac{d^3a}{d\alpha^3} + (y_3 - b) = 0 \\ &\frac{d^3b}{d\alpha^3} - (x_3 - a) = 0. \qquad (^*) \end{aligned} \tag{13}$$

Je différentie encore les équations (9), et j'obtiens, après avoir remplacé $\frac{d^2a}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2b}{d\alpha^2}$, $\frac{d^3a}{d\alpha^3}$, $\frac{d^3b}{d\alpha^3}$ par leurs valeurs (7), (13),

$$\begin{aligned} &\frac{d^2y_1}{d\alpha^2} = x_2 - y_3 \\ &\frac{d^2x_1}{d\alpha^2} = x_3 - y_2. \end{aligned} \tag{14}$$

La détermination du rayon de courbure de F ne présente plus aucune difficulté; on trouve

$$\rho_F = \frac{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{\frac{3}{2}}}{(y_2 - y_1)(y_2 - y_3) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

(*) On pourrait nommer le point $(x_3\ y_3)$ centre instantané du 3e ordre.

ou bien

$$(15) \qquad \rho_r = \frac{\overline{OO_1}^2}{\overline{O_1O_2}\cos\alpha_1}.$$

O, O_1, O_2, sont les points (x_1y_1), (x_2y_2), (x_3y_3), et α_1 l'angle $(\widehat{\overline{OO_1}, \overline{O_1O_2}})$.

Le rayon de courbure de la courbe M se détermine aussi assez facilement, on trouve d'abord

$$(16) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2x'_1}{d\alpha^2} &= x'_3 - x'_2 + x'_2 - x'_1 \\ \frac{d^2y'_1}{d\alpha^2} &= y'_3 - y'_2 + y'_2 - y'_1\,; \end{aligned}$$

puis

$$\rho_m = \frac{[(y'_2-y'_1)^2+(x'_2-x'_1)^2]^{\frac{3}{2}}}{(y'_2-y'_1)^2+(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)(y'_3-y'_2)+(x'_2-x'_1)(x'_3-x'_2)}$$

ou

$$(17) \qquad \rho_m = \frac{\overline{OO_1}^2}{\overline{O_1O_2}\cos\alpha_1 + \overline{OO_1}}.$$

Les formules (15), (17) donnent définitivement

$$\frac{1}{\rho_r} \pm \frac{1}{\rho_m} = \frac{1}{\overline{OO_1}} = \frac{1}{D};$$

ce qu'il fallait démontrer.

Les formules (15), (17) font voir que le centre instantané du troisième ordre dédouble l'équation (12) donnée par M. Bresse.

Si l'on différentie plusieurs fois consécutivement les équations (1) en ayant soin d'égaler à zéro les résultats obtenus par chaque différentiation, on déterminera des points (x_4y_4), (x_5y_5),... qui ont des propriétés analogues.

Il est assez simple généralement de mettre en équation un mouvement géométriquement défini ; les exemples suivants indiqueront la marche à suivre.

1° Un point du plan mobile parcourt la ligne

$$F(x, y) = 0.$$

On prendra cette ligne pour origine des axes mobiles, et on posera

$$F(a, b) = 0.$$

2° Une ligne,

$$F(x', y') = 0,$$

passe constamment par un point fixe. On prendra ce point pour origine des axes fixes, et l'on posera

$$F(-a\cos\alpha - b\sin\alpha,\ a\sin\alpha - b\cos\alpha) = 0.$$

3° Une ligne,

$$(a) \qquad F(x', y') = 0,$$

touche constamment la ligne

$$(b) \qquad F_1(x, y) = 0.$$

On aura une équation de condition en éliminant x, y, x', y' entre les équations (a), (b), (1) et celle-ci

$$\frac{dF}{dx'}\left(\cos\alpha - \sin\alpha\,\frac{\dfrac{dF_1}{dx}}{\dfrac{dF_1}{dy}}\right) - \frac{dF}{dy'}\left(\sin\alpha + \cos\alpha\,\frac{\dfrac{dF_1}{dx}}{\dfrac{dF_1}{dy}}\right) = 0.$$

Elle exprime que les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ tirées des équations (a) et (b) sont égales.

Si les courbes (a), (b) se coupaient orthogonalement, on aurait à effectuer la même élimination, avec la seule différence que dans l'équation (c) la quantité $\dfrac{\frac{dF_1}{dx}}{\frac{dF_1}{dy}}$ serait remplacée par $\dfrac{\frac{dF_1}{dy}}{\frac{dF_1}{dx}}$.

4° Lorsque la figure en mouvement est un cercle ou une droite, on peut prendre, comme première équation de condition, une équation quelconque, car le cercle peut tourner autour de son centre, et la droite peut glisser sur elle-même, sans changer de position. Il faut pourtant tenir compte de la rotation ou du glissement, lorsqu'il s'agira de déterminer la seconde condition; le mouvement peut changer de nature.

5° Toute question relative aux roulettes trouve ici une solution directe *et générale*; cherchons, par exemple, la courbe qui doit rouler sur une ellipse

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1,$$

pour qu'un point de son plan trace son grand axe.

Je prends le point décrivant pour origine mobile; les équations de condition sont

$$(a') \qquad b=0, \quad \frac{da^2}{A^2}+\frac{1}{B^2}\frac{da^2}{d\alpha^2}=1.$$

La seconde s'intègre ; il vient

$$(b') \qquad \sin \frac{B}{A} \alpha = \frac{a}{A}.$$

La constante introduite par l'intégration, est déterminée par les initiales

$$\alpha = 0, \quad a = 0.$$

Les formules (3) en remplaçant au lieu de x', y' des coordonnées polaires et ayant égard aux équations de condition deviennent

$$\frac{da}{d\alpha} = r_1 \sin(\alpha + \theta_1), \quad 0 = r_1 \cos(\alpha + \theta_1);$$

d'où

$$(c') \qquad \alpha + \theta_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad \frac{da}{d\alpha} = r_1,$$

$$k = \text{entier}.$$

Enfin une simple élimination de a, α, entre les équations (a'), (b'), (c'), donnera l'équation de la courbe cherchée,

$$r_1 = B \cos \frac{B}{A}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} - \theta_1\right].$$

Lorsque

$$B = A,$$

l'équation ci-dessus devient

$$r_1 = B \sin \theta_1.$$

Ce dernier résultat constitue le théorème bien connu de Lahire; une circonférence de diamètre B, roule dans l'intérieur d'une autre de diamètre 2B; on connaît déjà toutes les propriétés de ce mouvement.

Faisons maintenant rouler la circonférence 2B sur la circonférence B, et examinons ce qui va se passer.

Dans le premier cas, tout point de la circonférence B décrivait un diamètre de la circonférence 2B, il est évident que dans le second cas ce diamètre passera constamment par un point fixe, l'ensemble de ces points constituera la circonférence B. Un point quelconque du plan de la circonférence B décrivait une ellipse; donc, si l'on trace sur le plan de 2B une ellipse ayant le même centre que 2B, elle passera dans le mouvement *inverse* par un point fixe. On voit ainsi que si l'on connaît les propriétés d'un mouvement quelconque, on peut en conclure un grand nombre de propriétés du mouvement inverse.

Voici encore quelques exemples :

Une droite roule sur une chaînette, un point déterminé du plan mobile décrit une droite.

Une spirale d'Archimède roule sur une parabole, un point du plan mobile décrit son axe de symétrie.

Une spirale hyperbolique

$$r\theta = A$$

roule sur la courbe

$$By = 2Ae^{\frac{x}{A}}.$$

Le pôle de la spirale décrit la droite $y = 0$.

Théorème. Soit C_m une courbe plane, R son rayon de courbure au point M, et N la partie de sa normale com-

prise entre M et une droite quelconque L de son plan. Faisons rouler la courbe C_m sur une droite L′, la droite L invariablement liée avec C_m enveloppera une courbe C'_m; désignons par R′ son rayon de courbure, et par N′ la partie de sa normale comprise entre M′ (point de C'_m qu'on détermine au moment où M est le centre instantané) et la droite L′, on a

$$\frac{R'}{N'} = 1 \pm \frac{R}{N}.$$

On démontrera aisément cette équation en faisant usage de la formule connue de Savary.

Il s'ensuit que la directrice d'une parabole roulant sur une droite, enveloppe une chaînette, la directrice d'une chaînette un point qui donnera à son tour un cercle, un diamètre de ce cercle enveloppera une cycloïde, et ainsi de suite.

Cette manière d'envisager les questions de la *cinématique*, me semble avoir l'avantage d'isoler les théorèmes que cette branche des mathématiques fournit à la géométrie, et de les renfermer tous dans un certain nombre d'équations; dans le cas qui nous occupe, elles sont les équations (1). Voyez la note à la fin.

On sait que la mesure du glissement d'une courbe C_m sur son enveloppe C_f est donnée par l'intégrale,

$$\text{(Q)} \qquad \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{1}{\rho_F} \pm \frac{1}{\rho_M}\right) r ds.$$

ρ_F, ρ_M sont les rayons de courbure des courbes F, M, qui roulent l'une sur l'autre pendant le mouvement; r, la distance du point de contact des courbes glissantes, à celui des courbes roulantes; enfin s, l'arc de ces dernières.

Dans le cas des engrenages, ρ, ρ_u, sont constants, et l'on peut se demander les courbes, C_m, C_f, à la condition que la valeur (Q) soit un minimum. On peut supposer pour cela que r et s, sont le rayon vecteur et l'arc d'une courbe qui, roulant sur les *cercles primitifs*, engendre par le pôle successivement les courbes C_m, C_f. Dès lors, les principes du *calcul des variations* conduisent à l'équation différentielle

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)=(x^2+y^2)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Si l'on pose

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,\qquad \frac{dy}{dx}=p,$$

elle se met sous la forme

$$-d\theta=\frac{dp}{1+p^2};$$

d'où

$$p=\operatorname{tang}(c-\theta);$$

l'intégration s'achève aisément, on trouve

$$x^2-y^2-2cxy=c'.$$

Il reste donc démontré que si l'on fait rouler une hyperbole successivement sur les deux *cercles primitifs* d'un système d'engrenage, et que l'on adopte les courbes tracées dans ces deux mouvements par son centre pour la

construction des dents conjuguées, le glissement sera un minimum.

Le roulement d'une hyperbole

$$x'y' = c^2$$

sur un cercle

$$x^2 + y^2 = R^2$$

est régi par les équations simultanées

$$\left(\frac{dr^2}{d\alpha^2} - r^2\frac{d\theta^2}{d\alpha^2}\right)\sin 2(\alpha-\theta) - 2r\frac{dr}{d\alpha}\frac{d\theta}{d\alpha}\cos 2(\alpha-\theta) = c^2,$$

$$\frac{dr^2}{d\alpha^2} + r^2\left(1 - \frac{d\theta}{d\alpha}\right)^2 = R^2.$$

r, θ, sont les coordonnées polaires de l'origine mobile (centre de l'hyperbole) ; α l'angle $(\widehat{xx'})$.

Une courbe C_f, fig. 1, peut être engendrée par un point O du plan d'une seconde courbe C_m roulant sur elle-même (*). Je vais donner le moyen de trouver C_m lorsqu'on se donne C_f et réciproquement.

(*) Pour exprimer qu'une courbe roule sur elle-même, il faut poser

$$x_1 = x_1' \qquad y_1 = y_1'$$

On démontrera sans peine que ces équations équivalent à celle-ci :

$$b + a \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = 0.$$

Je remarque pour cela que si le centre d'un cercle passant constamment par un point fixe O fig. 1, parcourt une courbe C_m, son enveloppe C_f est identique avec la courbe décrite par O pendant que C_m roule sur elle-même. En effet, le point-enveloppe O_1 du cercle variable, se trouve à chaque instant sur la perpendiculaire OO_1, abaissée du point O sur la tangente MT, à la courbe parcourue par le centre, car cette tangente joint les centres de deux cercles infiniment voisins; d'un autre côté si l'on fait rouler C_m sur elle-même (dans ce roulement je suppose que les points homologues coïncident à chaque instant) le point O, à cause de la symétrie, fig. 1, coïncidera à chaque instant avec O_1.

Soit maintenant

$$(p) \qquad y = F(x),$$

l'équation de la courbe C_f (le point O est l'origine); l'équation du cercle variable, ξ, η, étant les coordonnées de son centre, sera

$$(q) \qquad x^2 + y^2 = 2\xi x + 2\eta y,$$

et comme il doit toucher constamment C_f

$$(r) \qquad F'(x) = -\frac{x-\xi}{y-\eta},$$

éliminant x, y, entre les équations (p), (q), (r), on trouvera une relation entre ξ, η qui sera précisément l'équation de la courbe cherchée C_m.

En voici un exemple :

Soit

$$(t) \qquad x = \text{A} = \text{const.}$$

l'équation de la courbe C_r, dans ce cas on a

$$F'(x) = \infty,$$

et par conséquent l'équation (r) se réduit à

$$(v) \qquad y - \eta = 0.$$

Éliminant x, y, entre (q), (t), (v), il vient,

$$\eta^2 = A^2 - 2A\xi.$$

C'est donc une parabole ; l'équation $x = A$ représente sa directrice, et l'origine est à son foyer.

Il est à peine nécessaire d'observer que ce résultat est susceptible d'une généralisation.

Les équations auxquelles on est conduit en étudiant un mouvement plan, sont parfois très-compliquées, et la coulisse de Stephenson nous en donnera un exemple ; il serait donc fort à désirer de connaître un moyen pour l'étudier graphiquement (*).

C'est une méthode pareille que je vais indiquer ici ; elle est remarquable par sa simplicité.

On trace sur une feuille de papier à dessin, bien ten-

(*) Hachette, dans son *Traité historique des machines à vapeur*, a proposé de construire un appareil pour le tracé de la courbe à longue inflexion ; mais, pour une autre courbe, on serait obligé de construire un autre appareil, et même d'en inventer, ce qui n'est pas commode.

due sur une planche, tout ce qui est donné sur le plan fixe; quant aux données sur le plan mobile, on les trace sur une feuille de papier transparent, puis on effectue le mouvement. Un bon dessinateur obtient des résultats excellents. On peut distribuer sur le plan fixe plusieurs crayons qui traceront en même temps plusieurs courbes, de cette manière on pourra d'un seul coup d'œil, examiner toutes les courbes tracées par les différents points du plan fixe sur le plan mobile. D'après une remarque faite plus haut, on examinera très-facilement le mouvement *inverse*. Les différentes courbes de la fig. 2 ont été tracées de cette manière.

Les formules que j'ai établies suffisent généralement, pour l'étude des propriétés géométriques des organes, destinés à transmettre le travail moteur dans les machines, et dont le mouvement s'effectue dans un plan. Je vais commencer cette étude par le *parallélogramme de Watt* et la *coulisse de Stephenson.*

Le premier de ces appareils a été successivement étudié par Prony (*) et MM. Vincent (**), Carbonnel (***), Tchebychew (****). Pour ce qui concerne le second, nous avons un mémoire de M. Phillips (*****), plus les nombreuses expériences qu'on a faites aux États-Unis et qu'on trouvera dans la neuvième livraison de l'ouvrage de MM. Clark et Zerah Colburn. Le but que ces savants se sont proposé, est différent de celui qu'on se propose ici.

(*) Architecture hydraulique, *Traité des machines à feu.*

(**) Mémoires de la Société de Lille, années 1836-1837, — Nouvelles annales de mathématiques. t. VII.

(***) *Mém. de l'Acad. de Belgique*, t. XX.

(****) *Mém. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg*, t. VII (savants étrangers).

(*****) *Annales des mines*, 5e série, t. III, p. 1.

PARALLÉLOGRAMME DE WATT.

Deux points A, B, du plan mobile tracent sur le plan fixe deux circonférences OA, OB_1; O, O_1, sont leurs centres. Les paramètres du mouvement sont au nombre de quatre. Soit fig. 2.

$$OA = R, \quad O_1B = R_1, \quad OO_1 = C, \quad AB = D,$$
$$AOO_1 = \theta_1, \quad BO_1O = \theta'_1.$$

O, A, sont les deux origines; OO_1, AB, les axes des x et x'.

Le mouvement se met en équation très-facilement, il vient

$$a^2 + b^2 = R^2,$$
$$(a + D\cos\alpha - C)^2 + (b + D\sin\alpha)^2 = R^2_1$$

ou bien

$$(18) \qquad \cos\alpha\,(R\cos\theta_1 - C) + R\sin\alpha\sin\theta_1 - nR\cos\theta_1 = B,$$

en remplaçant au lieu de a, b, des cordonnées polaires R, θ_1, et désignant

$$\frac{C}{D} = n, \quad \frac{1}{2D}(R^2_1 - R^2 - D^2 - C^2) = B.$$

Projetons $OABO_1$ sur OO_1, il viendra

$$(19) \qquad D\cos\alpha - R\cos\theta_1 - R\cos\theta'_1 = C.$$

L'élimination de α entre les équations (18), (19), don-

nera à peu près l'équation de M. Carbonnel (*), mais il vaut mieux laisser figurer l'angle α dans l'équation (18).

Les formules (3), (4), deviennent dans le cas actuel

$$(4)' \quad \begin{cases} r_1 = \pm\sqrt{x^2_1 + y^2_1} = \pm R\left(1 - \dfrac{d\theta_1}{d\alpha}\right) \\ \operatorname{tang}\theta_1 = \dfrac{y_1}{x_1} \end{cases}$$

$$(3)' \quad \begin{cases} r'_1 = \sqrt{x'^2_1 + y'^2_1} = \pm R\,\dfrac{d\theta_1}{d\alpha} \\ \operatorname{tang}(\theta_1 - \alpha) = \dfrac{y'_1}{x'_1} = \operatorname{tang}\theta'_1. \end{cases}$$

Ajoutons la première et la troisième de ces équations, il vient

$$r_1 + r'_1 = \pm R.$$

On retrouve ainsi la condition que deux courbes doivent remplir pour qu'elles puissent former un système de galets. Cette condition a été donnée pour la première fois par Euler.

Les équations (4)', (3)', s'intègrent facilement, on obtient

$$(20) \qquad \begin{aligned} r_1 &= \Phi\,[R(\theta_1 + \alpha) - \alpha r_1] \\ r'_1 &= \Phi_1[R(\theta'_1 - \alpha) + \alpha r'_1] \end{aligned}$$

$\Phi\,\Phi_1$, sont deux fonctions arbitraires. Il s'ensuit que les équations des courbes, dont on peut disposer pour faire des galets, doivent pouvoir se mettre sous la forme (20).

(*) M. Carbonnel avait considéré cette équation comme celle de la *courbe à longue inflexion*; ici elle se présente comme condition du mouvement.

Les formules (4)', (3)' ne dépendent point de l'équation (18), de sorte que ces formules seront toujours les mêmes toutes les fois qu'un point du plan mobile décrit un cercle, α doit être considéré comme une fonction de r_1, θ_1, et c'est précisément de cette fonction que dépend la forme des fonctions arbitraires (20).

Si l'on se donne une des courbes qui doivent former un système de galets, les formules ci-dessus fourniront l'autre, en voici un exemple.

Soit :

$$r_1 = R\theta_1.$$

une des courbes remplaçant $r_1\theta_1$ par leurs valeurs en fonction de $r'_1\theta'_1$ on trouve

$$R - r'_1 = R(\theta'_1 + \alpha)$$

Or les équations (4)' donnent

$$d\alpha = \frac{d\theta_1}{1 - \theta_1};$$

d'où

$$e^{-\alpha} = 1 - \theta_1;$$

enfin

$$\frac{r'_1}{R} = e^{\theta'_1 - 1 + \frac{r'_1}{R}}.$$

Il est très-difficile de mettre cette équation sous la forme (20).

Déterminons maintenant les courbes F, M.

Il suffit pour cela d'éliminer α entre les équations (18), (4)', et α, θ_1 ; entre les équations (18), (3)', ces élimina-

tions ne présentent pas de grandes difficultés; on trouve

$$(A)\quad \begin{cases} [Rn\sin^2\theta_1(r_1 - R) - (C - r_1\cos\theta_1)(B + Rn\cos\theta_1)]^2 + \\ [Cn\sin\theta_1(R - r_1) - nR^2\sin\theta_1\cos\theta_1 - Br_1\sin\theta_1]^2 = \\ [C^2 + Rr_1 - C\cos\theta_1(R + r_1)]^2; \\ [(r'_1 - R)Rn\sin^2\theta'_1 + (R\cos\theta'_1 - B)(C + r'_1 n\cos\theta'_1)]^2 + \\ [(r'_1 - R)(C + Rn\cos\theta'_1)\sin\theta'_1 - (R\cos\theta'_1 - B)r'_1 n\sin\theta'_1]^2 = \\ [C^2 + Cn\cos\theta'_1(R + r'_1) + n^2 r'_1 R]^2. \end{cases}$$

Ces équations sont très-compliquées, mais elles se simplifient considérablement, quand on modifie les paramètres du mouvement.

1° Supposons

$$D = C,$$

les deux courbes deviennent égales.

En effet, si l'on trace sur le plan mobile, et autour des points A, B, deux circonférences de rayons R, R_1, elles doivent passer constamment par les points O, O_1; donc dans le mouvement *inverse* les points O, O_1 décriront ces circonférences, et par conséquent les deux mouvements sont identiques.

N. B. En faisant cette supposition dans les équations de ces courbes, il faut avoir soin de changer dans l'une, θ en $180° + \theta$ pour avoir l'autre, car ce sont les points pour lesquels les angles polaires diffèrent de 180° qui coïncident à chaque instant.

2° Lorsque

$$R = R_1, \quad D = C,$$

le mouvement se décompose en deux autres distincts.

En effet, dans ce cas, l'équation (18) se réduit à

$$\sin\frac{1}{2}\alpha\left[\sin\frac{1}{2}\alpha(R\cos\theta_1 - C) - R\sin\theta_1\cos\frac{1}{2}\alpha\right] = 0,$$

et se décompose en deux :

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = 0$$

$$\tang\frac{1}{2}\alpha = \frac{R\sin\theta_1}{R\cos\theta_1 - C}.$$

La première représente un mouvement de ***reptation*** (*). La ***reptatoire*** est un cercle. L'élimination de α entre la seconde et $(4)'$ est très-simple ; il vient

$$r_1 = \frac{\frac{1}{2}(R^2 - C^2)}{R - C\cos\theta_1}.$$

C'est donc une conique, dont les deux centres sont les foyers, et R le grand axe.

Ce mouvement se réalise au moyen d'un petit appareil connu sous le nom de pendule de White. Le mouvement de la ***barre-lourde*** de ce pendule se réduit au roulement d'une ellipse sur elle-même ; on connaît d'ailleurs les ***galets elliptiques***.

3°. Le mouvement se décompose encore lorsque

$$C = R_1, \quad R = D.$$

Il est très-facile de voir que, dans ce cas l'équation (10)

(*) Johannis Bernouilli, *Opera omnia*, t. I.

prend la forme

$$\cos\frac{\alpha-\theta_1}{2}\left(R\cos\frac{\alpha-\theta_1}{2}-C\cos\frac{\alpha+\theta_1}{2}\right)=0,$$

et se décompose comme il suit :

$$\cos\frac{\alpha-\theta_1}{2}=0,$$

$$C\cos\frac{\alpha+\theta_1}{2}-R\cos\frac{\alpha-\theta_1}{2}=0.$$

La première représente un mouvement de rotation autour de O, comme on pouvait le prévoir d'avance. Pour ce qui concerne la seconde en développant les expressions $\cos\frac{\alpha+\theta_1}{2}$, $\cos\frac{\alpha-\theta_1}{2}$, elle devient

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\theta_1}{2}=\frac{C-R}{C+R}.$$

Différentiant et réduisant

$$\frac{d\theta_1}{d\alpha}=-\frac{\sin\theta_1}{\sin\alpha}=1-\frac{r_1}{R},$$

l'élimination de α entre ces dernières équations s'effectue sans peine ; on trouve

$$r_1=\frac{2CR(R\cos\theta_1-C)}{R^2-C^2}.$$

C'est un limaçon de Pascal. Voici encore l'équation de la

courbe roulante ou M

$$R^2(R^2 + r'^2_1 + 2Rr'_1\cos\theta'_1) = C^2(R + r'_1)^2.$$

Je vais donner maintenant l'équation de la courbe décrite par un point (x', y') du plan mobile. Il suffit pour cela d'éliminer α, θ_1 entre l'équation (10) et les équations (1) après avoir remplacé dans ces dernières a, b par $R\cos\theta_1$, $R\sin\theta_1$, on trouve sans difficulté

$$(21)\quad \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{(x-c+nx')(x^2+y^2+x'^2+y'^2-R^2)-2(xx'+yy')(x'+nx+B)}{2[(x-c+nx')(yx'-xy')-(y-ny')(x'x+yy')]} \\[2ex] \cos\alpha = \dfrac{2(x'+nx+B)(yx'-xy')-(y-ny')(x^2+y^2+x'^2+y'^2-R^2)}{2[(x-c+nx')(yx'-xy')-(y-ny')(xx'+yy')]} \end{cases}$$

L'élimination de α au moyen de la formule

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

donnera l'équation de la courbe cherchée. Si l'on suppose $y' = 0$ on trouvera l'équation de la *courbe à longue inflexion*

$$[2xx'(x'+nx+B)-(x-c+nx')(x^2+y^2+x'^2-R^2)]^2 +$$
$$[2(x'+nx+B)yx'-(x^2+y^2+x'^2-R^2)y]^2 = [2yx'(nx'-c)]^2.$$

Cette équation ainsi que les équations (A) se mettent sous forme de déterminant, en observant que

$$\begin{vmatrix} b'c''-c'b'' & a'c''-c'a'' & a'b''-b'a'' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}^2.$$

Voici encore deux autres formes

$$a^2+b^2-c^2=\begin{vmatrix} a & c-b \\ c+b & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b\sqrt{-1} & c \\ c & a-b\sqrt{-1} \end{vmatrix}.$$

La courbe (21) est intéressante. Je lis, en effet, dans le mémoire cité plus haut, de M. Phillips :

« ..... Je vais traiter d'abord et directement ce qui est relatif à l'avance linéaire du tiroir.

Supposons la coulisse au point mort, c'est-à-dire conduisant le tiroir par son point milieu, et la manivelle horizontale, c'est-à-dire le piston à fond de course. A ce moment, qui correspond à l'admission, on aura, suivant les cas, une certaine avance linéaire ou un certain retard du tiroir. Imaginons maintenant que, sans faire tourner l'essieu, on fasse par la bielle de suspension, monter ou descendre la coulisse de manière à mettre successivement le tiroir en rapport avec tous les crans de la détente. Il est clair que dans ce mouvement les différents points de la coulisse doivent, autant que possible, venir passer par le même point (*),..... afin que l'avance linéaire varie le moins possible. »

Or le mouvement dont parle M. Phillips dans ce passage, est précisément celui d'une ligne droite, dont deux points parcourent deux circonférences égales, et si l'on cherche la courbe qui passe constamment par un point fixe (coulisseau), on trouvera, sauf les paramètres, la courbe (21). Si le piston était dans l'autre extrémité de sa course, la courbe présenterait une autre branche (**) pour la con-

(*) Coulisseau.
(**) Cette seconde branche contient ordinairement deux inflexions.

struction de la coulisse; on pourra donc lui donner une courbure moyenne : les résultats seraient peut-être plus avantageux (*).

La courbe en question présente en général soixante-douze inflexions (**), mais il n'y en a qu'un très-petit nombre qui soient réelles.

Pour avoir son rayon de courbure il faut recourir aux équations (7), elles deviennent dans le cas actuel

$$R\left(1-\frac{d\theta_1^2}{d\alpha^2}\right)=x_2\cos\theta_1+y_2\sin\theta_1,$$

$$R\frac{d^2\theta_1}{d\alpha^2}=y_2\cos\theta_1-x_2\sin\theta_1.$$

On reconnaît sans peine dans la première de ces équations, une construction géométrique donnée par M. Bresse (***); cette équation représente la ligne CB (fig. 6 de son mémoire).

Pour rappeler le rôle que cette courbe joue dans la distribution de la vapeur dans les machines locomotives, on peut la nommer *courbe d'avance constante.*

COULISSE DE STEPHENSON.

Je me contenterai pour le moment de mettre en équation son mouvement.

Une horizontale et une verticale passant par le centre

(*) Le rayon de la coulisse de la machine mixte du chemin de fer de l'Ouest doit être, d'après cette remarque, de 2m,16. Ce chiffre résulte d'une construction graphique; les dimensions du mouvement de cette machine ont été prises dans le mémoire de M. Phillips.

(**) Voir un mémoire de M. Hesse sur les inflexions des courbes planes. (*Journal de Crelle*, t. XXVII.)

(***) *Journal polytechnique*, cahier 35.

de l'essieu moteur O_1, fig. 3, constitueront les axes fixes; la corde CC_1, de la coulisse et le point C, l'origine mobile et l'axe des x'; l'axe des y' sera perpendiculaire à la corde.

J'appelle :

a, b, les coordonnées de l'origine mobile;

$2c$, la longueur de la corde;

d, les longueurs égales des barres d'excentriques CD, C_1D_1;

P, P_1, les longueurs des bielles du piston et du tiroir;

M, N, les coordonnées du point d'attache B, par rapport aux axes fixes;

BC = R, φ, le double du complément de l'angle d'avance

ω, ω_1, les angles des deux rayons d'excentricité avec l'axe des x;

r, le rayon d'excentricité;

r_1, la manivelle du piston;

x', y', les coordonnées du coulisseau par rapport aux axes mobiles, ces coordonnées ne varient que d'un cran à l'autre;

X, Y, les déplacements du piston et du tiroir.

Centre instantané de la coulisse. Ce point doit se trouver à chaque instant sur BC. Pour trouver une seconde condition, retranchons, par la pensée, celle qui est déjà connue, de cette manière l'inconnue sera isolée et l'on pourra la découvrir plus facilement. Détachons donc la coulisse; le système devient à liaisons incomplètes; or, l'essieu moteur étant fixe, si l'on manœuvre le levier de changement de marche, la coulisse ne pourra que tourner autour d'un point tel que A, intersection des deux barres d'excentrique; le mouvement de l'essieu moteur lui imprimera une ro-

tation autour de O, donc le centre instantané de la coulisse doit se trouver sur AO.

Cette démonstration très-simple et naturelle en effet, est comprise implicitement dans les principes immortels de Poinsot (*). Voici encore deux exemples que je n'ai pas rencontrés.

Une courbe C, fig. 4, se meut de manière à couper sous un angle constant une courbe fixe C_1. Soit A le point d'intersection actuel de ces deux courbes, O, O_1 leurs centres de courbures en A. Le centre instantané de C doit se trouver à chaque instant sur une droite O O_1.

Une droite mobile AB, fig. 5, coupe une courbe C_2 fixe, aux points D, E; les angles que la droite AB fait avec C_2 aux points D, E sont égaux à chaque instant. Soit O, O_1 les centres de courbure de la courbe C_2 aux points D, E. Le centre instantané de AB se trouve à chaque instant sur une droite PQ perpendiculaire à AB.

Les démonstrations de ces deux propositions sont extrêmement simples. Il suffit de rappeler qu'on peut remplacer, dans ce genre de questions, les courbes C, C_1, C_2, par leurs cercles osculateurs.

La mise en équation du mouvement du système ne présente point de difficulté, on trouve

$$
\mathrm{V}\left\{\begin{array}{ll}
1 & \omega - \omega_1 = \varphi \\
2 & (a - r\cos\omega)^2 + (b - r\sin\omega)^2 = d^2 \\
3 & (a + 2c\cos\alpha - r\cos\omega_1)^2 + (b + 2c\sin\alpha - r\sin\omega_1)^2 = d^2 \\
4 & (a - \mathrm{M})^2 + (b - \mathrm{N})^2 = \mathrm{R}^2 \\
5 & x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\
6 & y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \\
7 & \mathrm{P}^2 = \mathrm{X}^2 + r_1^2 - 2r_1\mathrm{X}\cos(\omega + \mathrm{const.}) \\
8 & \mathrm{P}_1^2 = (x - \mathrm{Y})^2 + y^2.
\end{array}\right.
$$

Les quatre premières expriment que les longueur DD_1, D_1C_1, C_1C, CD, restent constantes pendant le mouve-

(*) *Théorie nouvelle de la rotation des corps.*

ment ; les deux qui suivent donnent les coordonnées x, y, du coulisseau en fonction de α, a, b, x', y', enfin les deux dernières expriment que les longueurs des bielles P, P_1, restent constantes.

L'équation (1V) équivaut aux deux suivantes, à chacune séparément

$$(\sin\omega + \sin\omega_1)\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi = \cos\omega_1 - \cos\omega,$$

$$(\cos\omega + \cos\omega_1)\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi = \sin\omega - \sin\omega_1.$$

Dans les équations (V), les variables sont au nombre de neuf (*), à savoir :

$$a, \quad b, \quad \alpha, \quad \omega, \quad \omega_1, \quad x, \quad y, \quad X, \quad Y.$$

En ajoutant dans ces équations celle de la *courbe d'avance constante*, on peut considérer x', y', comme variables, on aura de cette manière neuf équations entre onze variables ; en éliminant (approximativement) les neuf, on trouvera une relation entre trois variables seulement, soit :

$$F(X,\ Y,\ Z) = 0$$

Z étant la variable x' ou y' introduite par la détente.

(*) Une des variables a ou b s'élimine d'elle-même, si l'on prend pour origine des axes fixes le point d'attache B ; car, dans ce cas, l'équation (4V) devient

$$a^2 + b^2 = R^2,$$

et en passant aux coordonnées polaires elle se réduit à une identité.

A l'aide de cette équation, on pourrait construire des tables à double entrée, suivies d'une planche à double échelle, analogues à celles de Coriolis et Lalanne pour le calcul des terrassements. Mais il ne serait pas prudent d'entreprendre des opérations très-compliquées, à cause du grand nombre de paramètres, pour un appareil *qui pourrait être remplacé d'un jour à l'autre* (*).

Le mouvement de la coulisse est celui qu'on a examiné à propos du *parallélogramme de Watt*, avec la différence que le plan fixe se trouve ici animé d'un mouvement de rotation, et de là la nécessité de le suspendre.

Dans un second mémoire je tâcherai de donner un essai de l'élimination de neuf variables, et je continuerai l'étude du mouvement d'une autre série d'organes.

NOTE.

Dans le cas général du mouvement d'un système à trois dimensions, on doit considérer les équations

$$(l) \qquad \begin{aligned} x &= \alpha + a\,x' + b\,y' + c\,z' \\ y &= \beta + a'x' + b'y' + c'z' \\ z &= \gamma + a''x' + b''y' + c''z'. \end{aligned}$$

Les quantités $a, b, c, \ldots..$ sont liées par les équations

$$(m) \qquad \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 & \quad a\,a' + b\,b' + c\,c' &= 0 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 & \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1 & \quad a''a + b''b + c''c &= 0. \end{aligned}$$

(*) C'est pour rapprocher, en quelque sorte, deux questions également difficiles et importantes, que je rappelle les tables des terrassements, en parlant de la coulisse de Stephenson.

Les déplacements d'un point quelconque sont

$$(n) \qquad \begin{aligned} \Delta x &= \Delta\alpha + x'\Delta a + y'\Delta b + z'\Delta c \\ \Delta y &= \Delta\beta + x'\Delta a' + y'\Delta b' + z'\Delta c' \\ \Delta z &= \Delta\gamma + x'\Delta a'' + y'\Delta b'' + z'\Delta c''. \end{aligned}$$

Pour l'axe instantané, ces déplacements étant nuls, on a

$$(p) \qquad \begin{aligned} \Delta\alpha + x'\Delta a + y'\Delta b + z'\Delta c &= 0 \\ \Delta\beta + x'\Delta a' + y'\Delta b' + z'\Delta c' &= 0 \\ \Delta\gamma + x'\Delta a'' + y'\Delta b'' + z'\Delta c'' &= 0. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta a & \Delta b & \Delta c \\ \Delta a' & \Delta b' & \Delta c' \\ \Delta a'' & \Delta b'' & \Delta c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A & B \\ -A & 0 & C \\ -B & -C & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Les valeurs de A, B, C sont

$$\begin{aligned} A &= a\,\Delta a' + b\,\Delta b' + c\,\Delta c' \\ B &= a\,\Delta a'' + b\,d\Delta'' + c\,\Delta c'' \\ C &= a'\Delta a'' + b'\Delta b'' + c'\Delta c''. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \pm 1 \quad (*).$$

Par conséquent,

$$(q) \qquad \begin{vmatrix} \Delta a & \Delta b & \Delta c \\ \Delta a' & \Delta b' & \Delta c' \\ \Delta a'' & \Delta b'' & \Delta c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière formule fait voir que les équations (p) ne sont compatibles qu'autant qu'on a

$$(r) \qquad t\Delta\alpha + t'\Delta\beta + t''\Delta\gamma = 0,$$

t, t', t'' étant les coefficients des éléments d'une même ligne verticale dans

(*) Lagrange. *Sur les Pyramides.*

le développement du déterminant (q). Le premier membre de l'équation figure (je le pense) comme facteur, dans l'expression de la vitesse de l'a instantané.

Les formules (n) sont équivalentes à celles que M. Bresse a données da sa *Mécanique* (Résistance des matériaux, p 81).

Il est bon d'ajouter encore que les équations (l) constituent une subs tution orthogonale ternaire, les valeurs de ses coefficients sont (Euler, *No commentarii Acad. Petropolitanæ*, t. XX) :

$$
\begin{array}{lll}
ha = 1 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2, & hb = 2(\lambda\mu - \nu), & hc = 2(\lambda\nu + \mu) \\
ha' = 2(\lambda\mu + \nu), & hb' = 1 + \mu^2 - \lambda^2 - \nu^2, & hc' = 2(\mu\nu - \lambda) \\
ha'' = 2(\lambda\nu - \mu), & hb'' = 2(\mu\nu + \lambda), & hc'' = 1 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2,
\end{array}
$$

la valeur de h, est

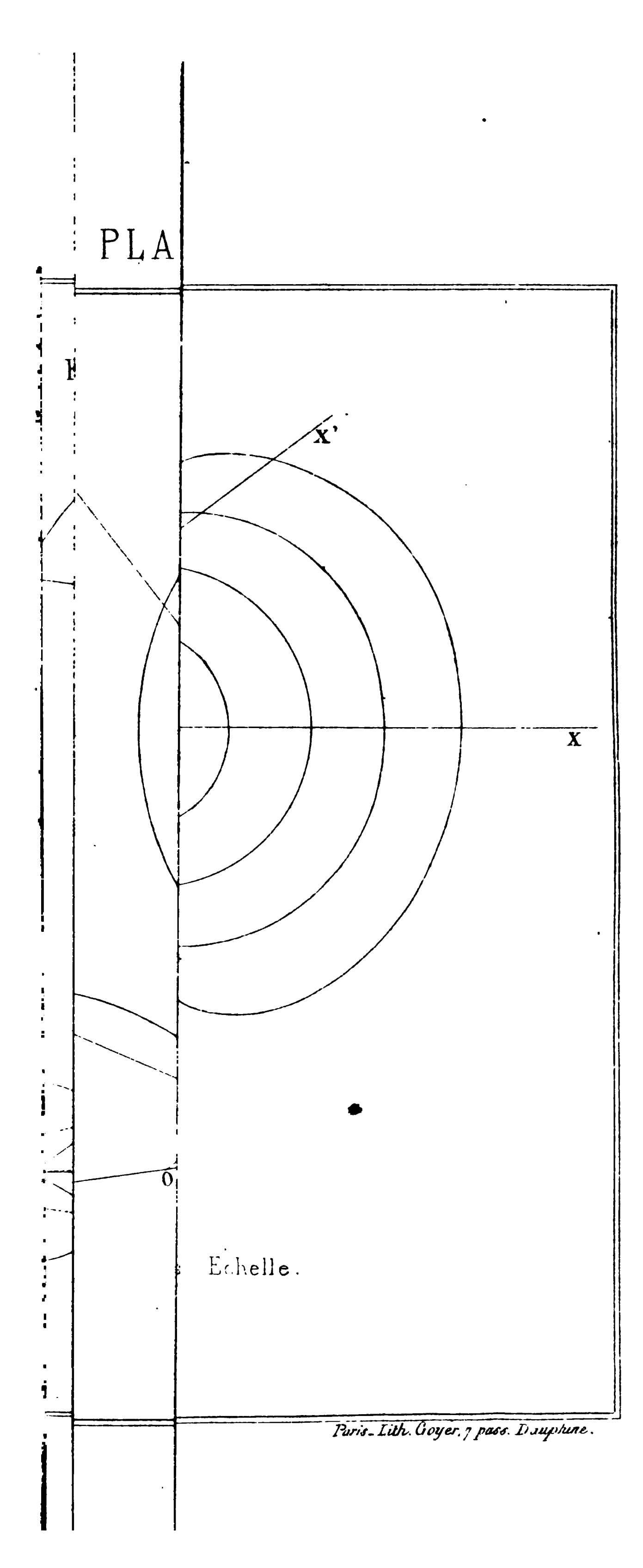
$$
h = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix}
$$

On peut donc remplacer abc..... par leurs valeurs en fonction de λ, μ, ν, et supprimer de la question *les lignes symétriques* (m), mais on ne doit pas le faire d'après une observation de M. Lamé (*Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes*, page 15). D'ailleurs, dans toute étude .... etc.

La signification géométrique des quantités λ, μ, ν a été donnée par Rodrigues (*Journal de M. Liouville*, t. V).

Paris, le 5 août 1863.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Cᵉ, 26, rue Racine.



Paris_Lith. Goyer, 7 pass. Dauphine.

ROCHE (Ed.). Note sur la **Distribution de l'électricité** à la surface des corps sphériques. 1852. Br. in-4. 1 fr. 50

— **Mémoires sur divers points d'astronomie** : Méthode pour calculer les éclipses de soleil. — Mémoire sur la loi de la densité à l'intérieur de la terre. — Sur la figure de la terre, etc. 1848. Br. in-4. 3 fr.

ROUCHÉ, professeur au lycée Charlemagne. **Sur l'intégration des équations différentielles linéaires**. 1859. Br. in4. 2 fr.

— **Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de mécanique** relatifs au mouvement d'un point sur une surface. 1858. Br. in-4. 3 fr.

— **Mémoire sur le développement des fonctions en séries** ordonnées suivant les dénominateurs des réduites d'une fraction continue. 1858. Br. in-4. 3 fr.

— **Sur les fonctions X_n de Legendre**. 1858. In-4. 1 fr.

— **Note sur la théorie de la décomposition des fractions rationnelles**. 1858. In-4. 75 c.

SAINT-VENANT (De), ingénieur en chef des ponts et chaussées. Mémoire sur la **Résistance des solides**, suivi de deux notes sur la flexion des pièces à double courbure. 1844. In-4. 1 fr. 50

SERRET (Paul), professeur de mathématiques. **Des méthodes en géométrie**. 1855. In-8 avec fig. dans le texte. 6 fr.

SIMON (Ch.), docteur ès sciences, professeur au lycée d'Alger. **Leçons élémentaires d'astronomie**. 1 vol. in-8 avec planches. 1858. 7 fr. 50

Cet ouvrage a pour objet de servir à la fois de complément aux traités de cosmographie purement descriptive, et d'introduction aux ouvrages d'astronomie qui sont souvent difficiles à lire.

TIMMERMANS (A.), membre de l'Académie des sciences de Belgique, professeur à la Faculté des sciences de Gand. Traité de **Calcul différentiel et de calcul intégral**. 2e édition. 1860. 1 vol. in-8. Pl. 10 fr.

— Traité de **Mécanique rationnelle**. 1856. 1 vol. in-8, avec pl. 9 fr.

VERHULST. Traité élémentaire des **Fonctions elliptiques**, ouvrage destiné à faire suite aux Traités élémentaires de calcul intégral. Bruxelles, 1840. 1 vol. in-8. 8 fr.

— **Leçon d'arithmétique** dédiée aux candidats aux écoles spéciales, sur la multiplication abrégée (avec la mesure de l'erreur) ; le nombre de chiffres du quotient dans la division ; la division ordonnée de M. Fourier ; la division abrégée de M. Guy ; l'extraction de la racine cubique, etc. 1847. Br. in-12. 1 fr. 50

Paris. — Typographie Hennuyer, rue du Boulevard des Batignolles, 7.

Monsieur Gerono Professeur de Mathématiques Hommage respectueux Nicolaïdès

THÉORIE DU MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN.

APPLICATION AUX ORGANES DES MACHINES.

2me MÉMOIRE.

PAR N. NICOLAÏDÈS,

Lieutenant du génie de l'armée hellénique,
Docteur ès Sciences Mathématiques.

ATHÈNES,
IMPRIMERIE NATIONALE,

1869.

THÉORIE DU MOUVEMENT

D'UNE FIGURE PLANE

DANS SON PLAN.

APPLICATION

AUX ORGANES DES MACHINES.

Athènes. — Imprimerie Nationale, 1869.

12 Alexander Ziwet 1.1

THÉORIE DU MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN.

APPLICATION AUX ORGANES DES MACHINES.

2me MÉMOIRE.

PAR N. NICOLAÏDÈS,
Lieutenant du génie de l'armée hellénique,
Docteur ès Sciences Mathématiques.

ATHÈNES,
IMPRIMERIE NATIONALE,
1869.

THÉORIE DU MOUVEMENT

D'UNE FIGURE PLANE

DANS SON PLAN.

Je reprends les formules de transformation des coordonnées,

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}$$

avec le deux équations de conditions

$$(2) \qquad \begin{aligned} F\,(a,b,\alpha) &= 0, \\ F_1(a,b,\alpha) &= 0. \end{aligned}$$

le mouvement se trouve ainsi complétement défini.

Différentiant les équations (1) plusieurs fois consécutivement, ou trouve, en égalant à zéro les secondes membres :

$$(1)' \qquad \begin{aligned} &\frac{da}{d\alpha} - x'_1\sin\alpha - y'_1\cos\alpha = 0, \\ &\frac{db}{d\alpha} + x'_1\cos\alpha - y'_1\sin\alpha = 0, \end{aligned}$$

$$(2)' \qquad \begin{aligned} &\frac{d^2a}{d\alpha^2} - x'_2 \cos\alpha + y'_2 \sin\alpha = 0, \\ &\frac{d^2b}{d\alpha^2} - x'_2 \sin\alpha - y'_2 \cos\alpha = 0. \end{aligned}$$

$$(3)' \qquad \begin{aligned} &\frac{d^3a}{d\alpha_3} + x'_3 \sin\alpha + y'_3 \cos\alpha = 0, \\ &\frac{d^3b}{d\alpha^3} - x'_3 \cos\alpha + y'_3 \sin\alpha = 0. \end{aligned}$$

. . . .
. . . . (*M*)
. . . .

$$(n)' \qquad \begin{aligned} &\frac{d^na}{d\alpha^n} \pm x'_n \sin\alpha \pm y'_n \cos\alpha = 0, \\ &\frac{d^nb}{d\alpha^n} \mp x'_n \cos\alpha \pm y'_n \sin\alpha = 0. \end{aligned}$$

$$(n+1)' \qquad \begin{aligned} &\frac{d^{n+1}a}{d\alpha^{n+1}} \pm x'_{n+1} \cos\alpha \mp y'_{n+1} \sin\alpha = 0, \\ &\frac{d^{n+1}b}{d\alpha^{n+1}} \pm x'_{n+1} \sin\alpha \pm y'_{n+1} \cos\alpha = 0. \end{aligned}$$

$$(n+2)' \qquad \begin{aligned} &\frac{d^{n+2}a}{d\alpha^{n+2}} \mp x'_{n+2} \sin\alpha \mp y'_{n+2} \cos\alpha = 0, \\ &\frac{d^{n+2}b}{d\alpha^{n+2}} \pm x'_{n+2} \cos\alpha \mp y'_{n+2} \sin\alpha = 0. \end{aligned}$$

On sait déjà que chaque couple (1)′, (2)′, ... représente sur le plan mobile un point, que nous appellerons *centre instantané de premier*, *second*.... *ect.*, *ordre*, suivant l'indice qui figure dans les coordonnées $(x'\,y')$; pour éviter la construction des figures, j'emploierai la let-

tre O_n, généralement pour désigner la position du point $(x'_n\ y'_n)$. En éliminant a, b, α, entre les équations (2) et (n') on aura une relation entre x'_n, y'_n, seulement, elle représentera évidemment le lieu des centres instantanés du n^e ordre sur le plan mobile ; je l'appellerai courbe mobile du n^e ordre, et pour abréger davantage, je la désignerai souvent par la lettre M_n. Son rayon de courbure sera représenté par $\rho_{(mn)}'$ et les rayons de courbure de ses développées successives par $\rho'_{(mn)}$....

L'élimination de x', y', entre les équations (1), et un couple quelqnonque (1)', (2'), ... ne présente la moindre difficulté ; α, disparait en même temps, et on trouve définitivement le système qui suit :

$$(1)_1 \quad \begin{cases} \dfrac{da}{d\alpha} - (y_1 - b) = 0, \\ \dfrac{db}{d\alpha} + (x_1 - a) = 0. \end{cases}$$

$$(2)_1 \quad \begin{cases} \dfrac{d^2a}{d\alpha^2} - (x_2 - a) = 0, \\ \dfrac{d^2b}{d\alpha^2} - (y_2 - b) = 0. \end{cases}$$

$$(3)_1 \quad \begin{cases} \dfrac{d^3a}{d\alpha^3} + (y_3 - b) = 0, \\ \dfrac{d^3b}{d\alpha^3} - (x_3 - a) = 0. \end{cases} \qquad (F)$$

....

....

$$(n)_1 \quad \begin{cases} \dfrac{d^na}{d\alpha^n} \pm (y_n - b) = 0, \\ \dfrac{d^nb}{d\alpha^n} \mp (x_n - a) = 0. \end{cases}$$

$$(n+1)_1 \quad \begin{aligned} &\frac{d^{n+1}a}{d\alpha^{n+1}} \pm (x_{n+1} - a) = 0, \\ &\frac{d^{n+1}b}{d\alpha^{n+1}} \pm (y^{n+1} - b) = 0. \end{aligned}$$

$$(n+2)_1 \quad \begin{aligned} &\frac{d^{n+2}a}{d\alpha^{n+2}} \mp (y_{n+2} - b) = 0, \\ &\frac{d^{n+2}b}{d\alpha^{n+2}} \pm (x_{n+2} - a) = 0. \end{aligned}$$

Ces équations représentent les centres instantanés des différents ordres sur le plan fixe; les notations précédentes subsistent avec des légéres modifications; ainsi la courbe fixe du n^e, ordre sera désignée par la lettre F_n; on obtiendra son équation en éliminant α, entre les équations (2) et $(n)_1$; son rayon de courbure sera représenté par $\rho_{(fn)}$, et ceux de ses développées successives par $\rho'_{(fn)}$, .. etc.

Si l'on avait differentié les équations (1) par rapport au temps t, et l'on supposait la vitesse angulaire,

$$\frac{d\alpha}{dt},$$

constante les équations $(n+1)_1$, $(n+2)_1$, auraient pris la forme,

$$\frac{d^{n+1}a}{dt^{n+1}} \pm (x_{n+1} - a) \frac{d\alpha^{n+1}}{dt^{n+1}} = 0,$$

$$\frac{d^{n+1}b}{dt^{n+1}} \pm (y^{n+1} - b) \frac{d\alpha^{n+1}}{dt^{n+1}} = 0,$$

$$\frac{d^{n+2}a}{dt^{n+2}} \mp (y_{n+2} - b) \frac{d\alpha^{n+2}}{dt^{n+2}} = 0,$$

$$\frac{d^{n+2}b}{dt^{n+2}} \pm (x^{n+2} - a) \frac{d\alpha^{n+2}}{dt^{n+2}} = 0.$$

on est conduit ainsi à ce théorème remarquable :

Lorsque la vitesse augulaire d'une figure plane qui glisse dans son plan est constante les accélérations mécaniques (*) *d'ordre pair* n^{em} *par exemple, sont dirigées, vers les centres instantanés du même ordre ; elles sont proportionelles à la distance du point consideré au centre instantané, et à la* n^{me}, *puissance de la vitesse augulaire. Les accélérations mécaniques d'ordre impaire, sont dirigées perpendiculairement aux droites qui joignent le point considéré, aux centres instantanés des ordres correspondants. Ces dernières accélérations ont évidemment les mêmes valeurs que les premières.*

L'étude des courbes M_n, F_n, n'est point difficile; la symétrie de leurs équations permet de le reconnaître à la simple vue. Différentions les équations $(n)'$ par rapport à α, il vient :

$$\frac{d^{n+1}a}{d\alpha^{n+1}} \pm x'_n \cos\alpha \mp y'_n \sin\alpha \pm \frac{dx'_n}{d\alpha}\sin\alpha \pm \frac{dy'_n}{d\alpha}\cos\alpha = 0,$$

$$\frac{d^{n+1}b}{d\alpha^{n+1}} \pm x'_n \sin\alpha \pm y'_n \cos\alpha \mp \frac{dx'_n}{d\alpha}\sin\alpha \pm \frac{dy'_n}{d\alpha}\sin\alpha = 0.$$

et en remplaçant cos α, sin α, par leurs valeurs tirées des équations $(n+1)'$ on trouve,

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{dy'_n}{d\alpha} &= +(x'_{n+1} - x'_n), \\ \frac{dx'_n}{d\alpha} &= -(y'_{n+1} - y'_n). \end{aligned}$$

(*) Pour les distinguées des accélérations

$$\frac{d^n a}{d\alpha^n}, \quad \frac{d^n b}{d\alpha^n},$$

qui sont évidemment géométriques.

d'où

$$\frac{dy'_n}{dx'_n} = -\frac{x'_{n+1} - x'_n}{y'_{n+1} - y'_n} \tag{4}$$

de là ce théorème:

La droite qui joint les centres instantanés de deux ordres consécutifs, n^e $(n+1)^e$ par exemple, est normale à la courbe mobile du n^e ordre.

Differéntiant aussi les équations $(n)_1$, ou trouve:

$$\frac{d^{n+1}a}{d\alpha^{n+1}} \pm \left(\frac{dy_n}{d\alpha} - \frac{db}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\frac{d^{n+1}b}{d\alpha^{n+1}} \mp \left(\frac{dx_n}{d\alpha} - \frac{da}{d\alpha}\right) = 0,$$

et en remplaçant $\frac{db}{d\alpha}, \frac{da}{d\alpha} \cdots ; \cdot$, par leurs valeurs $(1)_1 \cdots$,

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{dy_n}{d\alpha} &= (x_{n+1} - x_1) \\ \frac{dx_n}{d\alpha} &= -(y_{n+1} - y_1), \end{aligned}$$

par conséquant

$$\frac{dy_n}{dx_n} = -\frac{x_{n+1} - x_1}{y_{n+1} - y_1}.$$

On a donc le théorème suivant:

La droite qui joint le centre instantané du premier ordre au centre instantané d'ordre quelquonque, $(n+1)^e$

par example, est dirigée normalement à la courbe lieu des centres instantanés du n^e ordre sur le plan fixe, c'est à dire à la courbe F_n.

Les deux théorèmes précédents combinés, feront connaitre aisément le centre instantané du $(n+1)^e$ ordre, quand'on a la direction des normales aux courbes F_n, M_n, et la position des deux centres O_1, O_n.

Passons maintenant aux éléments du deuxième ordre.

Diffèrentiant les équations (3), on obtient:

$$\frac{d^2y'_n}{d\alpha^2} = +\left(\frac{dx'_{n+1}}{d\alpha} - \frac{dx'_n}{d\alpha}\right)$$

$$\frac{d^2x'_n}{d\alpha^2} = -\left(\frac{dy'_{n+1}}{d\alpha} - \frac{dy'_n}{d\alpha}\right)$$

et ayant égard aux équations (3)....

$$(6)\quad \begin{aligned} \frac{d^2y'_n}{d\alpha^2} &= -\left[(y'_{n+1} - y'_{n+2}) + (y'_{n+1} - y'_n)\right], \\ \frac{d^2x'_n}{d\alpha^2} &= \left[(x'_{n+1} - x'_{n+2}) + (x'_{n+1} - x'_n)\right], \end{aligned}$$

remplaçant les valeurs (6) (3) dans l'expression du rayon de courbure de la courbe M_n, on trouve :

$$\rho_{(mn)} = \frac{\left[(x'_{n+1} - x'_n)^2 + (y'_{n+1} - y'_n)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{(y'_{n+1} - y'_n)^2 + (x'_{n+1} - x'_n)^2 + (y'_{n+1} - y'_{n+2})(y'_{n+1} - y_n) + (x'_{n+1} - x'_{n+2})(x'_{n+1} - x'_n)}$$

ou d'après les notations que nous avons déjà adoptées,

$$(7)\quad \rho_{(mn)} = \frac{\overline{O_nO_{n+1}}^2}{\overline{O_nO_{n+1}} + \overline{O_{n+1}O_{n+2}}\cos(\overline{O_nO_{n+1}}, \widehat{\ } \overline{O_{n+1}O_{n+2}})}$$

formule simple facile à énoncer et à construire géométriquement.

Le rayon de courbure de la courbe F_n, se détermine aussi aisément ; les équations $(n)_1$ deux fois différentiées donnent,

$$\frac{d^{n+2}a}{d\alpha^{n+2}} \pm \left(\frac{d^2y_n}{d\alpha^2} - \frac{d^2b}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

$$\frac{d^{n+2}b}{d\alpha^{n+2}} \mp \left(\frac{d^2x_n}{d\alpha^2} - \frac{d^2a}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

et ayant égard aux équations $(2)_1$, $(n+2)_1$,

$$(8) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2y_n}{d\alpha^2} &= -(y_{n+2} - y_2) \\ \frac{d^2x}{d\alpha^2} &= (x_{n+2} - x_2), \end{aligned}$$

remplaçant les valeurs (8), (5), dans l'expression du rayon de courbure, on obtient,

$$\rho_{(fn)} = \frac{\left[(x_{n+1} - x_1)^2 + (y_{n+1} - y_1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{(y_{n+2} - y_2)(y_{n+1} - y_1) + (x_{n+2} - x_2)(x_{n+1} - x_1)},$$

ou bien

$$(9) \quad \rho_{(fn)} = \frac{\overline{O_1O_{n+1}}^2}{O_2O_{n+2}\cos\left(\widehat{O_2O_{n+2}.\,O_1O_{n+1}}\right)}.$$

On peut continuer, et chercher les centres de courbure des développées successives des courbes M_n, F_n. Dans cette recherche les calcules se compliquent de plus en plus ;

les centres instantanés d'ordres supérieurs entrent dans les expressions des rayons inconnus, mais la méthode est complétement identique et je n'insisterai pas pour le moment.

Dans le premier mémoire sur cette question, j'ai donné une construction géométrique qui fait connaître la position du centre instantané du premier ordre dans un cas fort général, celui où une courbe mobile coupe sous un angle constant une courbe fixe; on peut supposer ensuite que l'une des courbes devient un point et l'autre une droite, ou inversement, on peut supposer l'angle constant nul ou droit, et obtenir ainsi touts les cas connus depuis longtemps. Voici l'énoncé de la construction dont je parle :

Le point de rencontre des deux courbes étant m, *actuellement, et* C, C_1, *leurs centres de courbure en ce point, le centre instantané se trouve sur la droite* CC_1. Fig. 1.

Dans ces mêmes circonstances, on peut déterminer le centre instantané du deuxième ordre; en effet le centre de courbure de la courbe décrite par le point C, est en C_1, on a donc (*),

$$CC_1 = \frac{\overline{CO_1}^2}{CO_2 \cos(\widehat{\overline{C.O_2}.\overline{C.O_1}})},$$

d'où

$$CO_2 \cos(\widehat{\overline{CO_2}\,\overline{CO_1}}) = \frac{\overline{CO_1}^2}{CC_1},$$

le second membre de cette dernière équation est complétement connu, et le point O_2 doit se trouver sur une perpendiculaire à CC_1, élevée par un point P, tel que :

(*) Théorie du mouvement d'une figure · · ect premier mémoire page 5.

$$(10) \qquad PC = \frac{\overline{CO_1}^2}{CC_1}.$$

Il y a un cas particulier dans lequel on peut déterminer, très-simplement, touts les centres instantanés. Supposons, en effet, qu'un point du plan mobile parcourt une ligne droite située sur le plan fixe, les équations (F) montrent que touts les centres d'ordres pairs, doivent se trouver sur cette droite ; les centres instantanés d'ordre impaire se trouvent sur une perpendiculaire élévée sur la droite par le point décrivant. Or si l'on assujetic un second point du plan mobile, à décrire une ligne droite, les centres instantanés d'ordre pair se confonderont avec le point de l'intersection des deux droites en question. Les centres instantanées d'ordre impair coincident avec le centre instantané du premier ordre.

Supposons dans les équations (9) (7), $n=1$ elles deviennent :

$$\rho_{(f1)} = \frac{\overline{O_1O_2}^2}{\overline{O_2O_3}\cos(\widehat{\overline{O_2O_3}.\overline{O_1O_2}})}$$

$$\rho_{(m1)} = \frac{\overline{O_1O_2}^2}{\overline{O_1O_2} + \overline{O_2O_3}\cos(\widehat{\overline{O_2O_3}.\overline{O_1O_2}})}$$

et en éliminant $\overline{O_2O_3}\cos(\widehat{\overline{O_2O_3}.\overline{O_1O_2}})$,

$$(11) \qquad \frac{1}{\rho_{(f1)}} \pm \frac{1}{\rho_{(f1)}} = \frac{1}{O_1O_2} = \frac{1}{D}$$

cette équation nous fera connaître les tangentes aux courbes mobiles et fixe, du deuxième ordre, c'est à dire le centre instantané du troisième ordre.

Différentions (11) il vient,

$$\frac{1}{\rho^2_{(f1)}}\frac{d\rho_{(f1)}}{ds} \pm \frac{1}{\rho^2_{(m1)}}\frac{d\rho_{(m1)}}{ds} = \frac{1}{D^2}\frac{dD}{ds}.$$

ds, est l'arc infiniment petit des courbes M_1, F_1; en divisant les deux termes de chaque fraction du premier membre par l'angle de contingence de ces mêmes courbes, on obtient,

$$(12) \qquad \frac{\rho'_{(f1)}}{\rho^3_{(f1)}} \pm \frac{\rho'_{(m1)}}{\rho^3_{(m1)}} = \frac{1}{D^2}\frac{dD}{ds}$$

la détermination de $\frac{dD}{ds}$, ne présente aucune difficulté. En effet O_2, O'_2, étant les deux positions successives du centre instantané du deuxième ordre *sur le plan mobil* on a Fig. 2.

$$\frac{KO_2}{KO'_2} = \frac{KO_2}{dD} = \text{teng } \varphi$$

$$\frac{KO_2}{O_1O'_1} = \frac{KO_2}{ds} = \frac{\rho_{(m1)} - D}{\rho_{(m1)}}$$

d'où

$$\frac{dD}{ds} = \frac{\rho_{(m1)} - D}{-\rho_{(m1)} \text{ teng } \varphi}$$

φ, étant l'angle que fait la tangente à la courbe mobile du deuxième ordre avec O_1O_2. Remplaçant la valeur précédente dans la formule (12) on trouve,

$$(13) \quad \rho_{(m_1)}\rho_{(f_1)}D\left(\frac{\rho'_{(f_1)}}{\rho^3_{(f_1)}} \pm \frac{\rho'_{(m_1)}}{\rho^3_{(m_1)}}\right) = \frac{1}{\operatorname{tang}\varphi}\left(\frac{\rho_{(m_1)}\rho_{(f_1)}}{D} - \rho_{(f_1)}\right)$$

pour la tangente à la courbe F_2, nous aurons Fig. 3.

$$\frac{KO_2}{KO'_2} = \frac{KO_2}{dD} = \operatorname{tang}\varphi_1$$

$$\frac{KO_2}{KO'_2} = \frac{KO_2}{ds} = \frac{\rho_{(f_1)}+D}{\rho_{(f_1)}\operatorname{tang}\varphi_1}$$

d'où

$$\frac{dD}{ds} = \frac{\rho_{(f_1)}+D}{\rho_{(f_1)}\operatorname{tang}\varphi_1}$$

par conséquent (12)

$$(14) \quad \rho_{(m_1)}\rho_{(f_1)}D\left(\frac{\rho'_{(f_1)}}{\rho^3_{(f_1)}} \pm \frac{\rho'_{(m_1)}}{\rho^3_{(m_1)}}\right) = \frac{1}{\operatorname{tang}\varphi_1}\left(\frac{\rho_{(m_1)}\rho_{(f_1)}}{D} + \rho_{(m_1)}\right)$$

Nous allons construire maintenant les formules (13) (14) géométriquement ; pour chacune d'elles il y a deux cas à considérer, suivant que l'on prend dans le premier membre le signe plus ou le signe moins, c'est-à-dire suivant que les centres de courbure des courbes M_1, F_1, se trouvent du même côté de la tangente commune ou des côtés différents.

Soit T_1K, Fig. 4. la tangente commune aux courbes M_1, F_1, et C, C_1, leurs centres le courbure, C', C_1', ceux de leurs développées. Abaissons sur O_1C', O_1C_1', les perpendiculaires CT, C_1T_1, et joignons CT_1, C_1T; par le point O_2, abaissons sur ces dernières, les perpendiculaires O_2K, O_2K_1, je dis qu'on aura:

$$(15) \quad O_1K \pm O_1K_1 = \rho_{(m1)}\,\rho_{(f1)}\,D\left(\frac{\rho'_{(f1)}}{\rho^3_{(f1)}} \pm \frac{\rho'_{(m1)}}{\rho^3_{(m1)}}\right).$$

en effet, le triangle $T_1O_1C_1$, donne :

$$T_1O_1 = \rho_{(f1)} \text{ tang } O_1\widehat{C_1}T_1$$

et le triangle $O_1C_1T_1$,

$$\rho_{(f1)} = \rho'_{(f1)} \text{ tang } O_1\widehat{C_1}T_1$$

donc

$$T_1O_1 = \frac{\rho^2_{(f1)}}{\rho'_{(f1)}}$$

les deux triangles O_2O_1K, T_1O_1C, donnent également,

$$T_1O_1 = \rho_{(m1)} \text{ tang } T_1\widehat{C}O_1$$

$$O_1O_2 = D = O_1K \text{ tang } T_1\widehat{C}O_1$$

et en combinant les deux dernières avec la précédente on trouve définitivement

$$O_1K = \frac{\rho_{(m1)}\,\rho'_{(f1)}\,D}{\rho^3_{(f1)}}$$

on aura de même

$$O_1K_1 = \frac{\rho_{(f1)}\,\rho'_{(m1)}\,D}{\rho^3_{(m1)}}$$

en ajoutant et en retranchant celle-ci de la précédente, on trouve évidemment l'équation (15).

Il nous reste à chercher l'expression géométrique des seconds membres des équations (13) (14). Menons pour cela une circonférence sur le diamètre CC_1, elle coupe la tangente commune T_1K, au point Q ; par ce point, et par le point O_2, faisons passer une seconde circonférence ayant son centre sur O_1C_1, cela étant fait on aura :

$$CP = \frac{\rho(f_1)\,\rho(m_1)}{D} + \rho(m_1)$$

$$C_1P = \frac{\rho(f_1)\,\rho(m_1)}{D} - \rho(f_1)$$

la vérification de ces formules à la simple vue ne présente aucune difficulté ; on voit du reste qu'elles complètent la construction que je me suis proposée ; en les combinant avec (13) (14)···· ect on obtient,

$$(16) \quad \begin{cases} \tan \varphi = \dfrac{O_1K \pm O_1K_1}{PC_1} \\[2ex] \tan \varphi_1 = \dfrac{O_1K \pm O_1K_1}{PC} \end{cases}$$

ayant ainsi la direction des tangentes aux courbes M_2, F_2, nous pouvons, d'après les théorèmes énoncés au commencement de ce mémoire (page 10) déterminer le centre instantané du troisième ordre ; sur $C_1C'_1$, je prends une longueur $C_1A = KK_1$, je joint AP, et il vient,

$$\varphi = \widehat{PAC_1}$$

donc une parallèle UO_2, à AP menée par le point O_2, passera par le centre instantané du troisième ordre. Je prends

ensuite sur CC′ ume longueur $CA' = KK_1$, je joint PA′, et j'obtient

$$\varphi_1 = \widehat{CA'P}$$

donc, une perpendiculaire O_1V, abaissée du point O_1, sur A′P, passera par le même centre, qui se trouvera par conséquent sur l'intersection des deux droites UO_2, O_1V. Il y a une vérification à faire, en effet le rayon de courbure de la courbe F_1, est donné par l'équation:

$$\rho_{(f_1)} = \frac{\overline{O_1O_2}^2}{\overline{O_2O_3} \cos\left(\widehat{\overline{O_1O_2}\,\overline{O_2O_3}}\right)}$$

en projetant donc O_3, sur O_1O_2, on doit avoir Fig. 4.

$$FO_2 = \frac{\overline{O_1O_2}^2}{\rho_{(f_1)}}$$

cette vérification est indiquée sur la figure.

D'ailleurs on pourrait en faire une autre vérification en considérant la formule qui donne la valeur du rayon $\rho_{(m_1)}$, mais je n'insiste pas sur des détails, que le lecteur peut deviner aisément.

Dans des cas particuliers les formules (13) (14) et parconséquent les constructions précédentes se simplifient considérablement.

Supposons en effet,

$$(17) \qquad \begin{aligned} \rho'_{(m_1)} &= \rho'_{(f_1)} \\ \rho_{(m_1)} &= \rho_{(f_1)} \end{aligned}$$

les courbes F_1, M_1, sont *égales partout* et opposent leurs concavités ; les formules (13) (14) deviennent

$$(18) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\rho_{(m1)}}{\rho'_{(m1)}}, \quad \operatorname{tang} \varphi_1 = 3\,\frac{\rho_{(m1)}}{\rho'_{(m1)}}$$

si l'on avait,

$$(19) \qquad \frac{1}{\rho_{(m1)}} = 0,$$

les valeurs de φ, φ_1, seraient

$$(20) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\rho_{(f1)}}{\rho'_{(f1)}}, \quad \operatorname{tang} \varphi_1 = 2\,\frac{\rho_{(f1)}}{\rho'_{(f1)}}$$

on peut verifier ces formules avec quelques enoncés que j'ai donnés dans un petit article *sur les développées des courbes planes* (*).

Dans les cas où la courbe fixe F_1, est une ligne droite,

$$\frac{1}{\rho_{(f1)}} = 0$$

et alors,

$$(21) \qquad \operatorname{tang} \varphi = 0, \quad \operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{\rho_{(m1)}}{\rho'_{(m1)}}$$

mais en combinant (11) (21) on obtient

$$(22) \qquad \pm D = \rho_{(m1)}$$

(*) Les Mondes t, VIII. p, 620.

ce qui prouve que le centre instantané du deuxième ordre, coincide à chaque instant avec le centre de courbure de la courbe M_1; sous cette seconde forme, la question a été étudiée par M. Mannheim, et on peut voir que notre formule (21) est en parfait accord avec le théorème que ce géomètre a énoncé dans le tome IV. de la 2e serie du *Journal de Mathematiques pures et appliquées.*

Je passe aux propriétés des courbes décrites par les différents points du plan mobile pendant le mouvement.

Les équations $(1)_1$ donnent

$$(22) \qquad \frac{db}{da} = - \frac{x_1 - a}{y_1 - b}$$

donc :

Les normales aux courbes, décrites pendant le mouvement, par les différents points du plan mobile, passent à chaque instant par le centre instantané du premier ordre.

C'est ce par théorème que la théorie qui nous occupe a commencé. Descartes (*) et Bernoulli (**) avaint déjà donné des cas particuliers et à des points de vue différents, mais c'est M. Chasles qui l'a mis sous sa forme définitive.

Toutes les fois que nous aurons à étudier les courbes décrites par les points du plan mobile nous supposerons que le point décrivant est l'origine, cette supposition nous dispensera de faire une foule des calculs comme on le verra dans la suite.

Le rayon de courbure de la courbe décrite par l'origine est,

(*) *Lettres* t. II de l'edition de 1724 p. 39.
(**) *De centro spontaneo rotationis.* Opera, t. IV, p. 265.

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{da}{dx}\right)^2 + \left(\frac{db}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{da}{dx}\frac{d^2b}{dx^2} - \frac{db}{dx}\frac{d^2a}{dx^2}}$$

et d'après les équations $(1)_1$........,

$$\rho = \frac{[(x_1-a)^2+(y_1-b)^2]}{(y_1-b)(y_2-b)+(x_1-a)(x_2-a)}$$

ou bien

$$(23) \qquad \rho = \frac{\overline{OO_1}^2}{OO_2 \cos(\widehat{\overline{OO_1}.\overline{OO_2}})}$$

la construction géométrique de cette formule ne présente aucune difficulté. Soit Fig. 5, TT_1, la tangente commune aux courbes M_1, F_1, et O, le point décrivant ; on joindra OO_2, et par le centre instantané du premier ordre on élèvera une perpendiculaire sur OO_1, elle coupera OO_2, en S, par ce point on abaissera une perpendiculaire sur TT_1, et le centre de courbure cherché sera en C.

Je vais mettre maintenant la formule (23) sous une forme qui est plus commode souvent aux applications. Pour cela je projette le centre du deuxième ordre sur la droite, qui joint le centre du premier ordre au point considéré. Je pose ensuite

$$PO_1 = p, \quad OO_1 = r, \quad O_1C = r_1,$$

et la formule (23) prendra la forme,

$$(21) \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}$$

nous allons lire sur cette équation diverses propositions intéressantes. Faisons successivement les trois suppositions suivantes :

$$\frac{1}{p} = 0 , \frac{1}{r} = 0 , \frac{1}{r_1} = 0$$

il vient :

Les points de la circonférence qui passe par les centres des deux premiers ordres, et qui a son centre sur la ligne qui joint ces deux points décrivent des infléxions.

inversement :

Les points de l'infini tracent des courbes dont les centres de courbure se trouvent sur une circonférence, qui a son centre sur la normale commune aux deux courbes roulantes ; elle est symétriqument placée à la precedente. (Mannheim).

Enfin, *si les centres de courbure des courbes roulantes viennent à coincider accidentelement* (*), *à cette instant, les rayons de courbure des courbes tracées sur le plan fixe sont divisés par le centre instantané du premier ordre en deux parties égales.*

Voici maintement une question qui comprend les propositions précédentes implicitement.

(*) Cela arrive toutes les fois que le centre instantané du deuxième ordre passe à l'infini.

Étant donnée sur le plan mobile une courbe Π_m, chercher la courbe Π_{2m}, sur laquelle se trouvent les centres de courboure des courbes tracées par touts les points de la courbe Π_m.

Pour résoudre cette question, rapportons touts les points de la courbe aux deux droites O_1T, O_1O_2, Fig. 6. soit et x, y, les coordonnées d'un quelquonque de ses points; et x_1, y_1, les coordonnées d'un point quelquonque de la courbe Π_{2m} on aura évidemment,

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$$

et d'après l'équation (24)

$$\frac{1}{D\sin\theta} = \frac{y}{D\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y_1}{D\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

d'où

$$y = \frac{Dy_1^2}{x_1^2+y_1^2-Dy_1}$$

$$x = \frac{Dx_1y_1}{x_1^2+y_1^2-Dy_1}$$

ayant l'équation de la courbe Π_m, on obtiendra l'équation de la courbe Π_{2m} par une simple substitution. On voit que si la courbe Π_m, est algébrique et de dégré m, la courbe Π_{2m}, sera également algébrique et de dégré 2 m.

Supposons,

$$x^2+y^2 = \infty$$

il vient

$$x^2_1+y^2_1=Dy_1$$

c'est l'équation de la circonférance des centres .. et connaissant la tangente à la courbe Π_m, on peut trouver celle à la courbe Π_{2m} sans la moindre difficulté. En effet différentiant (24) par rapport à l'angle polaire θ, qui est commune aux deux courbes et vient

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}+\frac{1}{r^2_1}\frac{dr_1}{d\theta}=\frac{\cos\theta}{D\sin^2\theta}$$

ou bien en désignant par K, K_1, les sous-normales en coordonnées polaires aux deux courbes

$$\frac{K}{r}+\frac{K_1}{r_1}=\frac{1}{P\tang\theta}$$

formule facile à construire géométriquement.

On peut trouver encore le rayon de courbure de la courbe Π_{2m}, mais ces questions sont faciles à traiter, car on a une méthode un guide, et on les résout en même temps qu'on se les propose ; je n'insisterai pas.

Les propriétés du mouvement inverse conduisent à des resultats qui sont souvent utiles pour la construction des rayons de courbure.

La courbe M_1, roule sur la courbe F_1 ; et le point O, quelquonque décrit une courbe, dont le rayon de courbure, est donné par l'équation,

$$\rho=\frac{\overline{OO_1}^2}{\overline{OO_2}.\cos(\widehat{\overline{OO_2}.\overline{O_1O}})}$$

supposons maintenant qu'on fasse rouler la courbe F_1, sur M_1, ce qui revient à renverser le mouvement. Le même point O décrira sur le plan de la courbe F_1, un arc dont le rayon de courbure R, sera

$$R = \frac{\overline{OO_1}^2}{2\overline{OO_1} - OO_2 \cos(\widehat{\overline{OO_2}\,\overline{OO_1}})}$$

en combinant ces deux dernières équations on obtient

$$(25) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{R} = \frac{2}{\overline{OO_1}}$$

Donc, et c'est un théorème auxquels j'attache une certaine importance :

Le centres instantané du premiere ordre est l'armonique conjugué du point décrivant, par rapport aux centre de courbure des courbes que ce point trace sur le plan fixe et mobile.

Je terminerai ce que j'avais à dire sur le *centre instantané du deuxième ordre* avec une simple observation. Pour connaître la position de ce point il n'est pas suffisant de connaître les rayons de courbure de courbes tracées par deux poins du plan mobile sur le plan fixe, il faut encore que ces points ne soient pas en ligne droite avec le centre instantané du premier ordre.

Je passe au centre instantané du troisième ordre.

Le rayon de courbure ρ', de la développée d'une courbe plane est donné par la formule,

$$(26)\quad \rho' = 3\rho\,\frac{\frac{da}{d\alpha}\frac{d^2a}{d\alpha^2}+\frac{db}{d\alpha}\frac{d^2b}{d\alpha^2}}{\frac{da}{d\alpha}\frac{d^2b}{d\alpha^2}-\frac{db}{d\alpha}\frac{d^2a}{d\alpha^2}}-\rho^3\,\frac{\frac{da}{d\alpha}\frac{d^3b}{d\alpha^3}-\frac{db}{d\alpha}\frac{d^3a}{d\alpha^3}}{\left(\frac{da^2}{d\alpha^2}+\frac{db^2}{d\alpha^2}\right)}$$

On y arrivera aisément en suivant les procédés ordinaires du calcul differentiel ; Je passerai sur ces petits détails, que le lecteur pourra rétrouver lui même sans difficulté. Ramplaçant dans l'expression ci-dessus, au lieu de $\frac{da}{d\alpha}$, $\frac{db}{d\alpha}$, ... leurs valeurs tirées des équations (F), (M), on trouve,

$$\rho' = 3\rho\,\frac{(y_1-b)(x_2-a)-(x_1-a)(y_2-b)}{(y_1-b)(y_2-b)+(x_1-a)(x_2-a)}$$

$$-\rho^3\,\frac{(y_1-b)(x_3-a)-(x_1-a)(y_3-b)}{[(x_1-a)^2+(y_1-b)^2]^2}$$

ou bien d'après notre notation synoptique :

$$(27)\quad \rho' = -3\rho\ \text{teng}\,(\widehat{\overline{OO_1}.\overline{OO_2}})+\frac{\rho^3}{\overline{OO}^3_1}\overline{OO_3}\sin(\widehat{\overline{OO_1}.\overline{OO_3}})$$

Pour construire cette formule géométriquement menons Fig. 6. par le centre instantané du troisième ordre une parallèle QO_3, à la droide OO_1, elle racontrera la perpendiculaire abaissée du centre instantané du deuxième ordre sur OO_1, au point Q; élevons sur OC, une perpendiculaire CK, et prolongeons OO_2, et OQ, jusqu'à S, et R, on aura,

$$CS = \rho \text{ teng } (\widehat{\overline{OO_2}.\overline{OO_1}})$$

menons ensuite par les points O_1, et R, deux droites parallèles à CK, et OC, et joignons OT, il viendra:

$$CK = \frac{\rho^3}{\overline{OO}_1^3} \overline{OO}_3 . \sin (\widehat{\overline{OO_1}\, \overline{OO_3}}),$$

par conséquent,

$$\rho' = -3\,\overline{CS} + \overline{KC}.$$

La construction précédente, ainsi que la formule (27) se trouve dans une lettre adressée par M. Bour à un de mes compatriotes; M. Bour était à cette époque à Teki-Keui (*) et c'est au sujet de mon premier mémoire sur cette question que la lettre fut écrite (**). Je saisis l'occasion de le rémercier sincèrement.

Lorsque il s'agit de la courbe tracée par un point qui se trouve en ligne droite avec les centres instantanés du pre-

---

(*) Monastère de l'Asie Mineure.

(**) Je transcris ici un passage relatif à la priorité de la formule (23). « ······ J'arrive au centre instantané des accélérations, l'utilité de ce point pour la construction des rayons de courbure à été mis en évidence par M. Transon qui l'a nommé centre du cercle du roulement. (Voir mon cours lithographié de Mécanique, dans lequel cette partie est la plus mal rédigée). Ce qui revient à M. Bresse c'est d'avoir fait un centre instantané des accélérations, chose que ce point n'est pas, car les coordonnées de ce point sont proportionelles à $\frac{d^2a}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2b}{d\alpha^2}$, et non pas à $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$. C'est comme si l'on disait un Grec-Turc······ »

mier et du troisième ordre, la construction précédente se simplifie considérablement, on a en effet dans ce cas,

$$OO_3 \sin(\widehat{\overline{OO_1} . \overline{OO_3}}) = 0,$$

si un point donné du plan mobile décrit une circonférance ou un sommet de courbe on aura pour ce point

$$\rho' = 0$$

ce qui donne

$$3\,\overline{CS} = \overline{KC}$$

la longueur CS, et par conséquent KC, est connue, on déterminera le point K, ensuite les points T, Q, et enfin la droite QO_3, sur laquelle doit se trouver le centre instantané du troisième ordre.

D'une manière générale on déterminera le point en question, quand on connaît les rayons de courbures des développées des courbes tracées par deux points du plan mobile, il faut seulement que ces deux points ne soient pas en ligne droite avec le centre instantané du premier ordre; du reste il est facile de comprendre que lorsqu'on connaît un seul rayon ρ', on peut connaître tous ceux qui correspondent aux points qui se trouvent en ligne droite avec le centre du premier ordre et le point considéré; il en est de même pour le rayons ρ.

MODÉRATEUR A FORCE CENDRIFUGE.

Je vais donner en quelques lignes la théorie du modérateur à force centrifuge, modifié tout récemment par Mr Léon Foucault.

Soit OA, l'arbre de rotation, OC le pendule suspendu, et CA la bielle d'attache; Mr Leon Foucault transporte les boules du modérateur sur les bielles AC.... Elles se trouvent ainsi forcées de se mouvoir, non plus sur une sphère, mais sur ellipsoïde de révolution autour de l'arbre, si l'on suppose,

$$OC = AC.$$

Je traiterai la question dans le cas général.

Supposons Fig. 7 l'une des boules en M, et soient, M sa masse,

$$AC = m,\ \ OC = m_1,$$
$$OA = z,\ \ AM = l,$$

Par suite du glissement de la bielle CA, sur l'arbre de rotation, la boule M, tournera autour d'un centre instantané qui se trouve en B; la vitesse augulaire sera:

$$\omega_1 = \frac{1}{BA}\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z \operatorname{tang} \varphi}\frac{dz}{dt}$$

on remplacera évidemment φ, par sa valeur en z,

$$\cos \varphi = \frac{z^2 + m_1^2 - m^2}{2m_1 z}$$

la vitesse du point M sur le plan BAO s'en déduit sans la moindre dificulté, on aura :

$$V_1 = \frac{MB}{z \text{ teng } \varphi} \frac{dz}{dt}$$

A cette vitesse, il faut ajouter celle qui provient du mouvement du système autour de l'arbre OA; en désignant par ω, la vitesse augulaire autour de l'arbre, on aura :

$$V = \overline{MP}.\omega = r.\omega$$

pour déterminer maintenant la vitesse totale du point M, dans l'espace absolu, il faut composer V et V_1 ; cette construction ne présente pas de difficultés et se trouve d'ailleurs dans tous les traités de mécanique élémentaire. La direction de la vitesse totale sera évidement celle de la tangente à la trajectoire.

Établissons maintenant l'équation de l'équilibre du système.

Il est évident qu'il faut annuler la resultante de toutes les forces, y compris la force centrifuge, projetée sur le plan tangent à la surface sur laquelle le point M, est assujeti de se mouvoir; comme cette résultante se trouve sur un plan passant par l'arbre de rotation, il suffit de la projetée sur la droite MT perpendiculaire à MB. On obtient ainsi :

$$(28) \qquad r\omega^2 \cos\alpha = g \sin\alpha.$$

Il nous reste à déterminer la valeur de α, en fonction de φ ; les triangles ABM, OBA, donnent :

$$BA = l \frac{\sin(\alpha + \varphi_1)}{\cos\alpha} = z \text{ tang } \varphi$$

d'où

$$z \operatorname{tang} \varphi = l (\sin \varphi_1 + \operatorname{tang} \alpha \cos \varphi_1)$$

La valeur de z se détermine aussi aisément, le triangle OCA donne en effet,

$$z = m \frac{\sin(\varphi + \varphi_1)}{\sin \varphi} = m \left(\cos \varphi_1 + \frac{\sin \varphi_1}{\operatorname{tang} \varphi} \right)$$

remplaçant cette valeur dans l'équation précédente, on trouve

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{m}{l} \operatorname{tang} \varphi + \left(\frac{m}{l} - 1 \right) \operatorname{tang} \varphi_1$$

la formule (28) prend donc la forme

$$r\omega^2 = g \left[\frac{m}{l} \operatorname{tang} \varphi + \left(\frac{m}{l} - 1 \right) \operatorname{tang} \varphi_1 \right]$$

r et φ_1, peuvent être remplacées par leurs valeurs en fonction de φ ; on a :

$$r = l \frac{m_1}{m} \sin \varphi$$

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{\frac{m_1}{m} \sin \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_1}{m} \sin \varphi \right)^2}}$$

donc

$$\omega^2 = \frac{g}{l^2}\left[\frac{m^2}{m_1\cos\varphi} + \frac{m-l}{\sqrt{1-\left(\frac{m_1}{m}\sin\varphi\right)^2}}\right]$$

Abaissons par le point d'articulation une perpendiculaire sur OA, et posons

$$OC_1 = K\,,\ AC_1 = K_1\,,\ \frac{m}{l} = n$$

on aura

$$m_1\cos\varphi = K\,,\ \sqrt{1-\left(\frac{m_1}{m}\sin\varphi\right)^2} = \frac{K_1}{m}$$

remplaçant ces valeurs, dans celle de ω, on trouve,

(29) $$\omega^2 = gn\left(\frac{n}{K} + \frac{n-1}{K_1}\right)$$

formule simple et facile à discuter et à appliquer dans la pratique.

Si l'on a

$$n = 1$$

ma formule se reduit à

$$\omega^2 = \frac{g}{K}$$

c'est le cas où les masses du modérateur se meuvent sur une sphère.

Dans la pratique, on suppose généralement la longueur du pendule égale à la longueur de la bielle, c'est-à-dire

$$CA = CO$$

cela donne

$$K = K_1$$

et la formule (29) prend la forme

$$(30) \qquad \omega^2 = gn \frac{2n-1}{K}$$

Nous examinerons les trois cas suivants :

$$(31) \qquad \begin{array}{ll} 2n-1 > 0\,, & n > 0.50 \\ 2n-1=0\,, & n=0.50 \\ 2n-1 < 0\,, & n < 0.50 \end{array}$$

Le premier cas suppose les masses du modérateur au dessous du niveau du point de suspension ; la valeur de ω, doit augmenter avec n, et les ellipsoides deviennent de plus en plus allongés ; c'est le cas qu'on doit employer dans la pratique.

Si n, atteint la valeur 0,50, la vitesse angulaire s'annule, les masses se meuvent sur un plan horizontal, passant par le point de suspension ; la réaction devient perpendiculaire à la pesenteur et l'équilibre indifférent. Si la vitesse angulaire s'annule, la force centrifuge s'annulera aussi, et la pesenteur sera dès lors équilibrée par la résistance du plan sur lequel les masses de l'appareil sont forcées de

se mouvoir. Cela n'est pas possible en pratique. Dans le troisième cas la valeur de la vitesse angulaire est imaginaire, les ellipsoïdes s'aplatissent de plus en plus, la pésenteur, et la force centrifuge tombent du même côté de la normale MB, et leurs projections sur MT, sont dirigées dans le même sens. Les masses s'écarterons jusqu'à ce que le point A, vienne coincider avec le point O.

Soit T, le temps d'une révolution entière de l'appareil, on aura

$$\frac{2\pi}{T} = \omega$$

et par conséquent

$$(32) \qquad (T)^2 = \frac{4\pi^2 K}{gn\,(2n-1)}$$

— Les formules précédentes s'appliquent dans le cas où l'on renversent l'appareil.

En effet, en supposant que la vitesse angulaire augmente, la quantité K, diminue jusqu'à zéro, les bielles tendent à prendre une pocition horizontale et le manchon mobile tend de son côté à coincider avec le point de suspension ; supposons qu'il le dépasse, alors le système se trouvera évidemment renversé Fig. 8 et la formule (30) continuera à être applicable, il faut seulement changer le signe de K.

Des trois cas (31) le premier rend la valeur de la vitesse angulaire imaginaire, le troisième peut être employé dans la pratique, enfin le second cas annule la vitesse augulaire, et l'equilibre devient encore indifférent. Deux mots sur ce dernier cas. J'observe d'abord que les deux masses sont forcées de se mouvoir sur un plan horizontal et qu'elles sont soustraites à l'action de la pésanteur ; donc elles se meuvent sur une droite horizontale qui tourne autour d'un axe verticale. Ce mouvement est régi par les équations :

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2} = 0$$

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathrm{S}$$

r et θ, étant le rayon vecteur et l'angle polaire, et S, la réaction de la droite.

Ces équations font voir qu'il est impossible de faire,

$$r = \text{Const.}$$

ce qui justifie mon assertion.

— Au moyen de la formule (32) on peut trouver celle qui donne le temps d'une révolution du pendule parabolique. Posons à cet effet :

$$\mathrm{K} = \frac{b+a}{2}\cos\varphi$$

$$n = \frac{b+a}{2a}$$

la formule (32) prende la forme,

$$(33) \qquad \mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\cos\varphi}{g}\,\frac{a^2}{b}}$$

a et b sont évidemment les deux axes de l'ellipsoïde, sur lequelle les masses du regulateur sont assujeties à se mou-

voir. Supposons que les masses se trouvent entre l'articulation et le manchon, Fig. 9 et augmantons le demi-grand axe de l'ellipsoïde jusqu'à l'infini, la quantité

$$\frac{a^2}{b}$$

doit rester constante parce qu'elle représente, comme on sait, le paramètre p de l'ellipsoïde. Mais parce que le point de suspension passe à l'infini, on a :

$$\cos \varphi = 1$$

la formule (33) prend donc la forme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{p}{g}}$$

c'est précisément celle qu'on donne dans touts les traités de Mécanique élémentaire.

Athènes le 22 Juillet 1869.

$\overline{T}_1$

Fig 5.

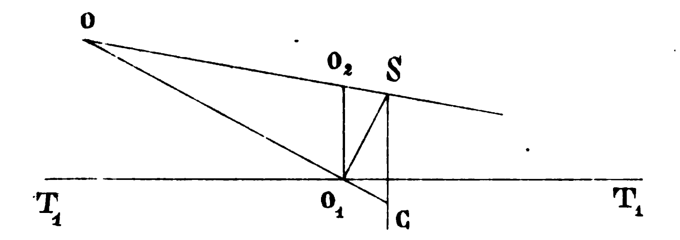


Fig. 8.

Fig. 9.

[illegible]

THÉORIE DU MOUVEMENT

D'UNE FIGURE PLANE

DANS SON PLAN.

APPLICATION

AUX ORGANES DES MACHINES.

TROISIÈME MÉMOIRE.

PAR N. NICOLAÏDÈS,
Docteur ès Sciences Mathématiques
(Faculté de Paris).

ATHÈNES,
IMPRIMERIE NATIONALE,
18[illegible]

Monsieur Cero
hommage respe

THÉORIE DU MOUVEMENT

D'UNE FIGURE PLANE

DANS SON PLAN.

APPLICATION

AUX ORGANES DES MACHINES.

THÉORIE DU MOUVEMENT
D'UNE FIGURE PLANE
DANS SON PLAN.

APPLICATION

AUX ORGANES DES MACHINES.

TROISIÈME MÉMOIRE.

PAR N. NICOLAÏDÈS,
Docteur ès Sciences Mathématiques
(Faculté de Paris).

ATHÈNES,
IMPRIMERIE NATIONALE,

1869.

THÉORIE DU MOUVEMENT

D'UNE FIGURE PLANE

DANS SON PLAN.

Différentiant les équations,

$$x = a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$$

(1)

$$y = b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$$

n fois consécutivement par rapport à α, on obtient, en égalant à zéro lesse conds membres,

$$\frac{d^n a}{d\alpha^n} \pm x'_n \sin\alpha \pm y'_n \cos\alpha = o$$

$(n)'$

$$\frac{d^n b}{d\alpha^n} \mp x'_n \cos\alpha \pm y'_n \sin\alpha = o$$

et en éliminant x'_n, y'_n, entre $(n)'$, (1),

$$(n)_1 \quad \begin{cases} \dfrac{d^n a}{dx^n} \pm (y_n - b) = o \\[2ex] \dfrac{d^n b}{dx^n} \mp (x_n - a) = o \end{cases}$$

a, b, sont données en fonction de α, par les deux équations de condition,

$$(2) \quad \begin{cases} F(a, b, \alpha) = o \\ F_1 (a, b, \alpha) = o \end{cases}$$

en éliminant donc a, b, α entre $(n)'$ (2) on aura l'équation de la courbe M_n ; lieu des centres instantanés du n[e] ordre sur le plan mobile, de même l'élimination des variables a, b, α entre $(n)_1$ (2) donnera l'équation de la courbe F_n lieu des centres instantanés du n[e] ordre sur le plan fixe. C'est sur les équations $(n)_1$ que nous avons opérer dans le précédent mémoire, mais le double signe dont les termes de ces équations sont précédés, donne lieu à des complications inextricables. En effet, les seconds termes de ces équations ont le même signe, toutes les fois que n, est pair, et ce sera le signe plus, si n est pair de la forme $4k$, en supposant que k, est un nombre impair; au contraire ces termes aurons des signes différents, lorsque n est impair, et le terme de la première équation sera affecté du signe *plus* ou du signe *moins*, selon que n est un impair de la forme $4k+3$, ou $4k+1$. C'est là un inconvénient une difficulté réelle, qu'il s'agit de faire disparaître; pour cela je rappele les deux formules suivantes,

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{d^n \sin \alpha}{dx^n} = \sin\left(\alpha + n\,\dfrac{\pi}{2}\right) \\[2ex] \dfrac{d^n \cos \alpha}{dx^n} = \cos\left(\alpha + n\,\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

en différentiant donc n fois consécutivement les équations (1) et égalant à zéro les seconds membres, nous pouvons mettre les résultats sous la forme,

$$\frac{d^n a}{d\alpha^n} + x'_n \cos\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right) - y'_n \sin\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right) = o$$

$$\frac{d^n b}{d\alpha^n} + x'_n \sin\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right) + y'_n \cos\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right) = o$$

et en développant,

$$\frac{d^n a}{d\alpha^n} + \cos n\frac{\pi}{2}\left(x'_n \cos\alpha - y'_n \sin\alpha\right) -$$

$$\sin n\frac{\pi}{2}\left(x'_n \sin\alpha + y'_n \cos\alpha\right) = o$$

$$\frac{d^n b}{d\alpha^n} + \sin n\frac{\pi}{2}\left(x'_n \cos\alpha - y'_n \sin\alpha\right) +$$

$$\cos n\frac{\pi}{2}\left(x'_n \sin\alpha + y'_n \cos\alpha\right) = o$$

ces équations représentent le centre instantané, du n^e ordre sur le plan mobile. Nous pouvons éliminer x' y' entre ces équations et (1), et nous obtiendrons,

$$\frac{d^n a}{d\alpha^n} = -(x_n - a)\cos n\frac{\pi}{2} + (y_n - b)\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d^n b}{d\alpha^n} = -(x_n - a)\sin n\frac{\pi}{2} - (y_n - b)\cos n\frac{\pi}{2}$$

et en désignant par U_n, l'angle que fait la droite OO_n, qui

joint le point (x_n, y_n) à l'origine mobile, avec l'axe des x, fixe, on pourra écrire les formules qui précédent comme il suit,

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{d^n a}{d\alpha^n} &= -\overline{OO}_n \cos\left(U_n + n\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{d^n b}{d\alpha^n} &= -\overline{OO}_n \sin\left(U_n + n\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

forme extrêmement simple, et qui conduit bien plus rapidement, aux résultats que nous avons obtenus jusqu'ici, par des méthodes, un peu différentes ; il est aussi évident que ces deux équations suffisent pour déterminer le centre instantané du n^e ordre, au moyen des variables U_n, $\overline{OO}_n$

Les équations (4) peuvent se mettre sous la forme,

$$\left(\frac{d^n a}{d\alpha^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n b}{d\alpha^n}\right)^2 = (\overline{OO}_n)^2$$

$$\frac{d^n b}{d\alpha^n} = \frac{d^n a}{d\alpha^n} \operatorname{tang}\left(U_n + n\frac{\pi}{2}\right)$$

a, b, étant données en fonction de α, et α étant connue à chaque instant, on peut au moyen de ces dernières équations déterminer $\overline{OO}_n$ et U_n.

Avant d'aller plus loin, faisons quelques applications.

Un point du plan mobile décrit une circonférence, il s'agit de déterminer la position des centres instantanés des divers ordres. En prenant le point décrivant pour origine mobile, et le centre de la circonférence pour origine fixe, on aura pour équation de condition,

$$(5)\qquad a^2 + b^2 = R^2$$

R étant le rayon de la circonférence. Différentions maintenant cette équation $n+1$, fois consécutivement par rapport à α, il viendra,

$$a\frac{d^{n+1}a}{d^{n+1}\alpha}+b\,\frac{d^{n+1}b}{d\alpha^{n+1}}+n\left(\frac{da}{d\alpha}\,\frac{d^{n}a}{d\alpha^{n}}+\frac{db}{d\alpha}\,\frac{d^{n}b}{d\alpha^{n}}\right)+\frac{n\,(n-1)}{1.\ 2.}\left(\frac{d^{2}a}{d\alpha^{2}}\,\frac{d^{n-1}a}{d\alpha^{n-1}}+\frac{d^{2}b}{d\alpha^{2}}\,\frac{d^{n-1}b}{d\alpha^{n-1}}\right)+$$

$$\cdots+\frac{n\,(n-1)\ \cdots\ (n-k)}{1.\ 2.\ 3.\ \cdots\ k+1}\left(\frac{d^{k+1}a}{d\alpha^{k+1}}\,\frac{d^{n-k}a}{d\alpha^{n-k}}+\frac{d^{k+1}b}{d^{k+1}xxp^{n-k}}\,\frac{d^{n-k}b}{\ }\right)+\ \cdots\ +\frac{da}{d\alpha}\,\frac{d^{n}a}{d\alpha^{n}}+\frac{db}{d\alpha}\,\frac{d^{n}b}{d\alpha^{n}}=o$$

et en remplaçant a, b, et leurs derivées, par leurs valeurs (4) on obtient,

$$\mathrm{R}\ .\ \mathrm{OO}_{n+1}\cos\left[\mathrm{U}_{n+1}-\varphi+(n+1)\,\frac{\pi}{2}\right]+n\,\overline{\mathrm{OO}}_{1}\,.\,\overline{\mathrm{OO}}_{n}\cos\left[\mathrm{U}_{n}-\mathrm{U}_{1}+(n-1)\,\frac{\pi}{2}\right]+$$

(6) $$\frac{n\,(n-1)}{1.\ 2.}\,\overline{\mathrm{OO}}_{2}\,.\,\mathrm{OO}_{n-1}\cos\left[\mathrm{U}_{n-1}-\mathrm{U}_{2}+(n-3)\frac{\pi}{2}\right]+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n\,(n-1)\cdots\cdots(n-k)}{1.\ 2.\ 3.\ \cdots\ k+1}\,\overline{\mathrm{OO}}_{k+1}\,\overline{\mathrm{OO}}_{n-k}\cos\left[\mathrm{U}_{n-k}-\mathrm{U}_{k+1}+(n-2k-1)\frac{\pi}{2}\right]+\cdots+$$

$$\overline{\mathrm{OO}}_{1}\,.\,\overline{\mathrm{OO}}_{n}\cos\left[\mathrm{U}_{1}-\mathrm{U}_{n}+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]=o$$

φ, est l'angle que fait la droite qui passe par les deux origines, mobile et fixe, avec l'axe des x fixe.

L'équation précédente resout complétement la question que nous nous étions proposée ; supposons $n=o$, on aura

$$\cos\left(U_1 - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = o \quad , \quad \text{d'où } U_1 = \varphi$$

donc le centre instantané du premier ordre, se trouve sur la droite qui passe par les deux origines, fixe et mobile ; faisons ensuite $n=1$, et nous trouverons,

$$- R.\,\overline{OO}_2 \cos(U_2 - \varphi) = \overline{OO}^2_1$$

équation qui représente la perpendiculaire abaissée Fig. 1. du centre instantané du deuxième ordre sur la droite OO_1. Cette formule n'est que celle qui donne l'expression du rayon de courbure R, de la courbe décrite par l'origine mobile O, et cette circonstance peut servir de vérification. Faisons encore $n=2$, alors on trouvera,

$$R\,\overline{OO}_3 \cos(U_3 - \varphi + 2\pi) + 2\,\overline{OO}_1\overline{OO}_2 \cos\left(U_2 - U_1 + \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$\overline{OO}_2\;\overline{OO}_1 \cos\left(U_1 - U_2 - \frac{\pi}{2}\right) = o$$

ou bien

$$R.\,\overline{OO}_3 \cos(U_3 - \varphi) - 3\,\overline{OO}_1\,\overline{OO}_2 \cos(U_2 - U_1) = o$$

cette équation donnera aussi la projection du centre instantané du troisième ordre, sur la droite OO_1, lorsqu'on connaîtra les centres instantanés des ordres précédents, c'est-à-dire O_1, O_2. En continuant ainsi de proche en proche on pourra déterminer le centre instantané du n° ordre, quand on connaîtra touts les centres des ordres inférieurs.

Prenons pour second exemple le *mouvement conchoïdal*. Lorsqu'une droite OM, Fig. 2, du plan mobile passe constamment par un point fixe O, ses différents points décrivent des courbes que les anciens ont nommées conchoïdes (*), et le mouvement s'appelle dans ce cas, *mouvement conchoïdal*. Prenons pour axe des x', la droite OM, et le point fixe O, dont elle passe, pour origine fixe; l'origine mobile se trouvant sur un point quelconque de OM. Pour exprimer que l'axe des x', passe constamment par l'origine fixe, il faut faire dans les équations (1)

$$x = y = y' = o$$

ce qui donne,

$$a \sin \alpha - b \cos \alpha = o \tag{7}$$

Notons d'abord, que le mouvement, comme dans le cas précédent, est à liaisons incomplètes ; et pour qu'il soit bien déterminé, il faut encore une seconde rélation entre a, b, α; pour celà, on doit se donner l'équation, rélativement aux axes fixes, d'une quelquonque des conchoïdes décrites, par la droite OM, et prendre ensuite, le point décrivant pour origine mobile. Cette seconde rélation jointe à l'équation (7) rendra évidement le système à liaisons complètes.

S'il s'agit de déterminer l'équation d'une conchoïde quelquonque, on éliminera a, b, α, entre les deux équations dont nous venons de parler, et les équations (1), on aura ainsi une rélation entre x, y, x', y', qui sera l'équation de la courbe décrite par le point (x', y') du plan mobile, sur le plan fixe. Nous donnerons tout à l'heure, plusieurs exemples des conchoïdes, et nous montrerons comment, graçe à un artifice fort ingénieux de M. Ed. Habich, les calculs se simplifient, quand il s'agit de déterminer les courbes M_1, F_1, qui roulent l'une sur l'autre pendant le mouvement.

Occupons nous maintenant à déterminer l'équation qui lie les centres instantanés des divers ordres, en nous servant de l'équation (7).

(*) Voir Chasles: *Propriétés rélatives au Déplacement fini quelquonque, dans l'espace, d'une figure invariable.* Comptes rendus, t. LI et LII.

en la différentiant n fois consécutivement on obtient,

$$\sin\alpha \frac{d^n a}{d\alpha^n} - \cos\alpha \frac{d^n b}{d\alpha^n} + n\left(\cos\alpha \frac{d^{n-1}a}{d\alpha^{n-1}} + \sin\alpha \frac{d^{n-1}b}{d\alpha^{n-1}}\right)$$

$$- \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\left(\sin\alpha \frac{d^{n-2}a}{d\alpha^{n-2}} - \cos\alpha \frac{d^{n-2}b}{d\alpha^{n-2}}\right) \cdots\cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ \cdots\ (n-k+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \cdots\ k}\left[\sin\left(\alpha + k\frac{\pi}{2}\right)\frac{d^{n-k}a}{d\alpha^{n-k}} - \cos\left(\alpha + k\frac{\pi}{2}\right)\frac{d^{n-k}b}{d\alpha^{n-k}}\right] + \cdots$$

$$\cdots + a\sin\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right) - b\cos\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right) = o$$

et remplaçant les dérivées de a, b, par leurs valeurs (4) on obtient

$$\overline{OO}_n \sin\left(U_n - \alpha + n\frac{\pi}{2}\right) + n\,\overline{OO}_{n-1}\cos\left[U_{n-1} - \alpha + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] +$$

$$(8) \qquad \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\,\overline{OO}_{n-2}\sin\left[U_{n-2} - \alpha + (n-2)\frac{\pi}{2}\right] + \cdots\cdot$$

$$\cdots\cdots\cdots - \frac{n(n-1)\cdots\cdot(n-k+1)}{1.\ 2.\ \cdots\cdot k}\,\overline{OO}_{n-k}\sin\left[U_{n-k} - \alpha + (n-2k)\frac{\pi}{2}\right] + \cdots\cdot$$

$$\cdots\cdots\cdots + a\sin\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right) - b\cos\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

c'est la formule qui lie les centres instantanés des divers ordres dans le cas qui nous occupe; faisant, successivement $n=1$, 2, 3, $\cdots\cdot$ on les déterminera l'un après l'autre; la supposition $n=1$ donne,

$$\overline{OO}_1 \cos(U_1 - \alpha) + a\cos\alpha + b\sin\alpha = o$$

ce qui prouve que la projection du centre instantané du premier ordre O_1, Fig. 2. sur l'axe des x', se

trouve constamment à l'origine fixe comme on le savait déjà; faisons ensuite $n=2$, il vient,

$$\overline{OO}_2 \sin (U_2 - \alpha) - 2\,\overline{OO}_1 \sin (U_1 - \alpha) = o$$

formule, dont la traduction géométrique a été donnée par M. Bresse, dans un mémoire, que nous avons plus d'une fois cité.

Prenons $\overline{OK} = 2OO_1$ et élévons sur OK, une perpendiculaire KO_2, le centre instantané du seconde ordre, se trouvera sur cette perpendiculaire, soit en O_2. Faisons encore $n=3$, on trouve, en ayant égard aux équations précédentes,

$$-\overline{OO}_3 \cos (U_3 - \alpha) - 3\overline{OO}_2 \cos (U_2 - \alpha) + 2\overline{OO}_1 \cos (U_1 - \alpha) = o$$

formule fort simple à construire; on prendra une distance $KK_1 = 3\overline{KO}_2$ et on élévera par le point K_1, une perpendiculaire sur KK_1, le centre instantané du troisième ordre s'y trouvera.

Le mouvement conchoïdal jouit d'une autre propriété, qu'il est nécéssaire de faire connaitre, soit,

$$(9) \qquad r = F(\theta)$$

l'équation de la conchoïde MN, Fig. 2, en coordonnées polaires. Au moyen de simples différentiations, on peut déterminer les courbes M_1, F_1, qui roulent l'une sur l'autre pendant le mouvement. MO_1 étant la normale à la courbe MN au point M, et OO_1 perpendiculaire à OM, il est évident que le centre instantané se trouve au point O_1. Mais la longueur OO_1, est égale à la sous-normale de la courbe MN (en coordonnées polaires), donc le lieu géométrique des points O_1, en désignant par r_1, θ_1 ses coordonnées polaires, sera représenté par l'équation,

$$(10) \quad \overline{OO}_1 = \frac{dr}{d\theta} = r_1 = F'(\theta) = F'(\theta_1 - 90^\circ)$$

F', étant la derivée de F par rapport à θ. L'équation du lieu des centres instantanés sur le plan mobile se détermine aussi aisément. En effet, prenons pour pôle le point M, et pour axe polaire la droite MO, nous aurons,.

$$r'_1 = O_1 M \quad , \quad \theta'_1 = OMO_1.$$

r'_1, θ'_1, étant le rayon vecteur, et l'angle polaire de la courbe cherchée. Le triangle rectangle MOO_1, donne,

$$(11) \qquad \begin{aligned} F(\theta) &= r'_1 \cos\theta'_1 \\ F'(\theta) &= r'_1 \sin\theta'_1 \end{aligned}$$

l'élimination de θ, conduira à une relation entre r'_1, θ'_1, qui sera l'équation de la courbe cherchée. On voit donc qu'il est possible de déterminer les courbes qui roulent l'une sur l'autre, au moyen des simples différentiations.

Prenons pour exemple du mouvement conchoïdal, le cas ou un point H, Fig. 3. du plan mobile, parcourt une droite fixe AH, parallèle à l'axe des y fixe, le point qui la décrit sera pris sur l'axe des y', HB. Désignons en outre par p, q, les distances $\overline{OA}$ et $\overline{HB}$, constantes pendant le mouvement. Comme le point,

$$x' = o \quad , \quad y' = q$$

décrit la droite,

$$x = p$$

nous devons avoir d'après les équations (1), et en y remplaçans les valeurs qui précédent,

$$a = p + q \sin\alpha$$

avec la condition

$$b = q \operatorname{tang}\alpha$$

qui expriment que l'axe des x', passe constamment par l'origine fixe O. L'élimination de a, b, α, entre les deux der-

nières et (1) donnera l'équation de la courbe decrite par un point $(x' y')$ du plan mobile, sur le plan fixe. On trouve d'abord,

$$\sin\alpha = \frac{(x-p)y - x'y'}{xx' + (q-y')y}$$

$$\cos\alpha = \frac{(x-p)x + (q-y')y'}{xx' + (q-y')y}$$

d'où

$$(12)\qquad [(x-p)y - x'y']^2 + [(x-p)x + (q-y')y']^2 = [xx' + (q-y')y]^2$$

équation du quatrième dégré, dont l'étude attentive conduit à plusieurs résultats intéressants.

Supposons $x' = y' = o$, il vient

$$(x^2+y^2)(x-p)^2 = q^2y^2$$

et en passant aux coordonnées polaires,

$$(13)\qquad r = \frac{q\sin\theta + p}{\cos\theta}$$

qui représente la réciproque de la courbe d'ombre dans l'epure de la vis à filet triangulaire, lorsque les rayons lumineux sont parallèles (*), si en plus $p=q$, l'équation précédente représentera un strophoïde, dont on pourra évidemment construire le rayon de courbure au moyen des centres instantanés.

Déterminons maintenant les courbes F_1, M_1, qui roulent l'une sur l'autre pendant le mouvement; d'après ce qui précéde il suffit de différentier l'équation (13) par rapport à θ, il vient,

(*) Poncelet, *Applications d'Analyse et de Géometrie* t. I, *notes* p. 450 et 460; De la Gournerie, *Traité de géométrie descriptive* t. III, p. 136 et suiv.

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{q + p \sin\theta}{\cos^2\theta}$$

mais r_1, θ_1, étant le rayon vecteur et l'angle polaire de la conrbe F_1, on a,

$$\frac{dr}{d\theta} = r_1 = \frac{q + p \sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\theta_1 = \theta + 90^\circ$$

d'où

$$(F_1) \qquad r_1 = \frac{q - p \cos\theta_1}{\sin^2\theta_1}.$$

Aussi facilement on déterminera la courbe qui roule sur cette dernière; pour cela il faut éliminer θ, entre les deux équations suivantes,

$$r'_1 \cos\theta'_1 = \frac{p + q \sin\theta}{\cos\theta}$$

$$r'_1 \sin\theta'_1 = \frac{q + p \sin\theta}{\cos^2\theta}$$

r'_1, θ'_1, étant les coordonnées polaires de la courbe cherchée; l'élimination s'effectue aisément on trouve définitivement,

$$(M_1) \qquad [(r'_1 \cos\theta'_1)^2 + q\,(q - 2\,r'_1 \sin\theta'_1)] \times$$

$$[p^2 - q^2 - (r'_1 \cos\theta'_1)^2] + (r'_1 \sin\theta'_1)^2\,(p^2 - q^2) = o$$

équation qui se simplifie considérablement lorsqu'on modifie les paramètres p et q. Supposons $p = q$, les équations (F_1) (M_1) deviennent,

$$(11) \qquad \begin{aligned} (r_1 \sin\theta_1)^2 &= -\,2\,q\,r_1 \cos\theta_1 + q^2 \\ (r'_1 \cos\theta'_1)^2 &= 2\,q\,r'_1 \sin\theta'_1 - q^2 \end{aligned}$$

c'est donc une parabole qui roule sur elle même, mais de telle façon, que les points homologues coïncident à chaque instant; ainsi on peut engendrer le strophoïde par un mouvement continu. Il y a aussi à ajouter que dans ce cas particulier, le point, dont les coordonnées sont $x' = o$, $y' = \frac{1}{2} p$, et qui coïncide avec le sommet de la parabole roulante, décrit une cissoïde; c'est Newton, autant que je me rappelle, qui à fait cette dernière remarque. Mais nous avons démontrer dans le premier mémoire sur cette matière (p. 15), que la courbe S, décrite par le point O, d'une autre courbe Σ, roulante sur elle même, est l'enveloppe d'un cercle qui passe constamment par le point O, et dont le centre se meut sur la courbe Σ; donc la cissoïde est l'enveloppe d'un cercle, qui passe constamment par le sommet d'une parabole, que décrit son centre. C'est là un autre mode de génération de la cissoïde, non moins important que le premier.

Supposons encore,

$$q = o$$

dans les équations (F_1) (M_1), il vient,

$$(15) \quad \begin{cases} (r_1 \sin \theta_1)^2 = -pr_1 \cos \theta_1 \\ p = r'_1 \cos^2 \theta'_1 \end{cases}$$

la première représente une parabole et la seconde une courbe du quatrième dég é qu'il est assez facile de disculer.

C'est sous cette dernière forme ($q = o$) que les conchoïdes ont été étudiées pour la première fois par Nicomède. On pourra faire plusieurs autres suppositions, et arriver ainsi à la solution des problèmes plus ou moins intéressants; mais je n'insisterai pas sur ces détails.

Dans le deuxième mémoire j'ai donné, d'après M. Bour, l'expression du rayon de courbure ρ', de la première développée d'une courbe décrite par un point du plan mobile. Il s'agit dans ce qui suit de donner l'expression du rayon de courbure ρ'', de la deuxième développée. Le calcul différentiel donne pour expression de ce rayon en fonction de coordonnées Cartésiennes:

$$\frac{\rho''}{\rho}-\frac{\rho'^2}{\rho^2}=3\rho^2\,\frac{\left[\frac{da}{d\alpha}\frac{d^3a}{d\alpha^3}+\frac{db}{d\alpha}\frac{d^3b}{d\alpha^3}+\left(\frac{d^2a}{d\alpha^2}\right)^2+\left(\frac{d^2b}{d\alpha^2}\right)^2\right]}{\left(\frac{da^2}{d\alpha^2}+\frac{db^2}{d\alpha^2}\right)^2}-2\rho\rho'\,\frac{\frac{da}{d\alpha}\frac{d^3b}{d\alpha^3}-\frac{db}{d\alpha}\frac{d^3a}{d\alpha^3}}{\left(\frac{da^2}{d\alpha^2}+\frac{db^2}{d\alpha^2}\right)^2}$$

(16)

$$-\rho^3\,\frac{\frac{da}{d\alpha}\frac{d^4b}{d\alpha^4}-\frac{db}{d\alpha}\frac{d^4a}{d\alpha^4}+\frac{d^2a}{d\alpha^2}\frac{d^3b}{d\alpha^3}-\frac{d^2b}{d\alpha^2}\frac{d^3a}{d\alpha^3}}{\left(\frac{da^2}{d\alpha^2}+\frac{db^2}{d\alpha^2}\right)^{\frac{5}{2}}}+2\rho^3\,\frac{\left(\frac{da}{d\alpha}\frac{d^3b}{d\alpha^3}-\frac{db}{d\alpha}\frac{d^3a}{d\alpha^3}\right)\left(\frac{da}{d\alpha}\frac{d^2a}{d\alpha^2}+\frac{db}{d\alpha}\frac{d^2b}{d\alpha^2}\right)}{\left(\frac{da^2}{d\alpha^2}+\frac{db^2}{d\alpha^2}\right)^{\frac{7}{2}}}.$$

a, b, sont les coordonnées rectangulaires de la courbe; α, une variable indépendente, et ρ, ρ', ρ'' les rayons de courboure successifs.

Substituant dans cette équation les derivées de a, b, par leurs valeurs (4) on obtient aisément

$$
(17)\quad \begin{aligned}
\frac{\rho''}{\rho} = \frac{\rho'^2}{\rho^2} &- 3\rho^3 \frac{\overline{OO}_1 \,.\, \overline{OO}_3 \cos (U_3 - U_1) - \overline{OO}^2_2}{\overline{OO}^4_1} + 2\rho\rho' \frac{\overline{OO}_3 \sin (U_3 - U_1)}{\overline{OO}^3_1} \\
&- \rho^3 \frac{\overline{OO}_1 \,.\, \overline{OO}_4 \cos (U_4 - U_1) + \overline{OO}_2 \,.\, \overline{OO}_3 \cos (U_3 - U_2)}{\overline{OO}^5_1} + \\
&2\rho^3 \frac{\overline{OO}_3 \,.\, \overline{OO}_2 \sin (U_3 - U_1) \sin (U_2 - U)_1}{\overline{OO}^5_1}
\end{aligned}
$$

formule assez compliquée, mais qui, comme nous le verrons, se simplifie notablemment dans les applications usuelles.

Problème de M. Van der Mensbrugghe. Il consiste à déterminer l'équation de la courbe, lieu des intersections successives de deux courbes planes, tournantes dans un même plan, ou des plans parallèles. Cette question, importante par la belle expérience, signalée par M. Plateau, a été étudiée par M. Le François, dans le cas restreint, où le rapport des vitesses des deux lignes tournantes est un nombre entier. Je vais traiter la question, dans le cas où les lignes se meuvent d'une manière quelconque dans un même plan.

Soient

(18) $\Phi(x', y') = o \quad , \quad \Phi_1(x'', y'') = o$

les équations de ces lignes ; imprimons à chacunes d'elles un mouvement quelquonque ; en faisons suivre ces mouvements par les axes, auquels ces courbes sont rapportées, on aura les deux groupes d'équations que vrici

(19)
$$x = a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \qquad F_1(a, b, \alpha) = o$$
$$y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \qquad F_2(a, b, \alpha) = o$$

(20)
$$x = a' + x'' \cos \alpha' - y'' \sin \alpha' \qquad F_3(a', b', \alpha') = o$$
$$y = b' + x'' \sin \alpha' + y'' \cos \alpha' \qquad F_4(a', b' \alpha') = o$$

en désignant par x, y, les coordonnées, par rapport au système commun des axes fixes de l'intersection des deux lignes (18). Si l'on ajoute à ces équations une dernière :

(21) $$f(a, b, a', b', \alpha, \alpha') = o$$

pour établir une dépendance entre les deux mouvement, on aura onze équations entre les douze variables :

$$x, y, x', y', x'', y'', a, b, a', b', \alpha, \alpha'.$$

éliminant les dix dernières, on trouvera une rélation entre x, y qui sera précisément l'équation du lieu cherché. Toute la difficulté consiste donc à trouver les conditions des deux mouvements, et à une élimination.

Voici un exemple.

Nous supposerons que les deux lignes (18), sont des droites, que nous prendrons pour axes des y', y''; leurs équations serons donc,

$$x' = o \quad , \quad x'' = o$$

en outre, nous supposerons que ces droites se meuvent sur les plans d une bielle de longueur p, et d'une manivelle de longueur q; que les origines mobiles coïncident, l'une avec

le centre de rotation de la manivelle, et l'autre avec le point qui décrit une ligne droite, pendant le mouvement de la bielle; l'origine fixe coïncide aussi avec le centre de rotation de la manivelle, et l'axe de x, avec la direction du mouvement rectiligne du système.

D'après ces suppositions on aura,

$$b' = a' = b = o$$

et les équations (19) (20) (21) deviennent,

$$x = -y' \sin\alpha \quad , \quad q \sin\alpha + p \sin\acute{\alpha} = o$$

$$y = \quad y' \cos\alpha$$

$$x = a - y'' \sin\acute{\alpha} \quad , \quad q \cos\alpha + p \cos\acute{\alpha} = a$$

$$y = \quad y'' \cos\acute{\alpha}$$

l'élimination de y', y'', α, $\acute{\alpha}$, a, ne présente pas des difficultés sérieuses, et l'on trouve déffinitivement,

$$[x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - (p^2x^2+p^2y^2-q^2x^2)^{\frac{1}{2}}] \times$$

$$[qy + (p^2x^2+p^2y^2-q^2x^2)^{\frac{1}{2}}] = o$$

mais en supposant

$$qy - (p^2x^2+p^2y^2-q^2x^2)^{\frac{1}{2}} = o$$

on obtient

$$(x^2+y^2)(p^2-q^2) = o$$

qui répresente l'origine; l'équation du lieu cherché est par conséquant,

$$(22) \qquad (x^2+y^2)(p^2-x^2) = q^2x^2$$

équation que nous avons rencontrer plus d'une fois dans les

précédents mémoires. Si l'on fait $p=q$, cas qui correspond au système bien connu de Laire, on trouve,

$$y^2 p^2 = x^2 (x^2 + y^2)$$

et en passant au coordonnées pollaires,

$$(23) \qquad r = p \tan \theta$$

courbe dont les propriétés, très nombreuses et très élégantes, ont été donnée par M. De la Gournerie (*).

Supposons encore que les axes (x', y') sont animés d'un mouvement de translation uniforme, pendant que les (x'', y'') tournent autour de l'origine fixe uniformement, et cherchons la courbe lieu des intersections successives des droites,

$$y' = o \quad , \quad y'' = o$$

les conditions du mouvement donnent,

$$\alpha = o \quad , \quad b = c\acute{\alpha} \quad , \quad a = \text{const.}$$

d'où, en remplaçant dans les équations (19) (20) (21),

$$y = x'' \sin \acute{\alpha} \quad , \quad y = c\acute{\alpha}$$
$$x = x'' \cos \acute{\alpha}$$

l'élimination de x'', $\acute{\alpha}$, s'effectue aisément et l'on trouve,

$$(24) \qquad \frac{y}{x} = \tan \frac{y}{c}$$

équation fort simple pour que j'insiste

— Les considérations précédentes nous conduirons à la solution d'un problème, bien plus important.

Deux plans Π, P, se meuvent sur un troisième fixe, il s'agit de déterminer la courbe tracée, par un point (x' y')

(*) Traité de géométrie déscriptive.

du plan Π, sur le plan P. Le mouvement du plan P, sur le plan fixe, est régi par les équations (20), comme celui du plan Π, par les équations (19); la relation (21) établi enfin une dépendance entre les deux mouvements. Il est évident que les traces, d'un point quelquonque (x', y') du plan Π, sur le plan P, sont données par les coordonnées (x'', y''); les équations (19) (20) (21) au nombre de neuf, contiennent diz variables, à savoir:

$$x, y, x'', y'', a, b, a', b', \alpha, \acute{\alpha}$$

en éliminant les huit,

$$x, y, a, b, a', b', \alpha, \acute{\alpha}$$

on trouvera une rélation entre x'', y'', qui sera l'équation de la courbe cherchée, c'est-à-dire de la trace du point $(x'\, y')$ du plan Π, sur le plan P.

Des quatres équations:

$$F_1\,(a, b, \alpha) = o \qquad F_3\,(a', b'\, \acute{\alpha}) = o$$

$$F_2\,(a, b, \alpha) = o \qquad F_4\,(a', b', \acute{\alpha}) = o$$

on peut tirer les valeurs de a, b, a', b', en fonction de α, $\acute{\alpha}$, et remplacer ainsi ces équations par les suivantes

$$(25) \qquad \begin{array}{ll} a = \Phi_1\,(\alpha) & a' = \Phi_3\,(\acute{\alpha}) \\ b = \Phi_2\,(\alpha) & b' = \Phi_4\,(\acute{\alpha}) \end{array}$$

ces dernières combinées avec celles qui forment la première colonne de (19) (20), donnent

$$(26) \qquad \begin{array}{l} \Phi_1\,(\alpha) + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha = \Phi_3\,(\acute{\alpha}) + x'' \cos\acute{\alpha} - y'' \sin\acute{\alpha} \\ \Phi_2\,(\alpha) + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha = \Phi_4\,(\acute{\alpha}) + x'' \sin\acute{\alpha} + y'' \cos\acute{\alpha} \end{array}$$

et aussi,

$$(27) \quad f\left[\Phi_1(\alpha),\ \Phi_2(\alpha),\ \Phi_3(\acute{\alpha}),\ \Phi_4(\acute{\alpha}),\ \alpha,\ \acute{\alpha}\right] = o$$

la solution du problème que nous nous étions proposé, se réduit donc à l'élimination de α, $\acute{\alpha}$, entre les équations (26) (27).

Faisons quelques applications.

Nous supposerons que le plan P, est animé d'un mouvement de rotation autour de l'origine fixe, ce qui donnera,

$$a' = b' = o$$

quant au plan Π, nous lui imprimerons un mouvement de *reptation*, la reptatoire étant une circonférence de rayon R autour de l'origine fixe, cela donnera,

$$b = \mathrm{R} \cos \acute{\alpha} \quad , \quad a = \mathrm{R} \sin \acute{\alpha} \quad , \quad \alpha = o$$

et les équations (26) (27) déviennent

$$-y' = (x'' - \mathrm{R}) \cos \acute{\alpha} - y'' \sin \acute{\alpha}$$

$$x' = y'' \cos \acute{\alpha} + (x'' - \mathrm{R}) \sin \acute{\alpha}$$

d'où

$$x'^2 + y'^2 = (x'' - \mathrm{R})^2 + y''^2$$

donc le point (x', y') du plan Π, décrit sur le plan P, une circonférence.

Supposons encore,

$$b = a' = b' = o,$$

$$a = m\acute{\alpha} \quad , \quad \alpha = o$$

et prenons pour point décrivant l'origine (a, b), ce qui donnera,

$$x' = y' = o$$

les équations (26) (27) déviennent dans ce cas

$$m\acute{\alpha} = x'' \cos \acute{\alpha} - y'' \sin \acute{\alpha}$$

$$o = x'' \sin \acute{\alpha} + y'' \cos \acute{\alpha}$$

et en éliminant $\acute{\alpha}$,

$$(28) \qquad x''^2 + y''^2 = \left(m \text{ arc tang} \frac{y''}{x''}\right)^2$$

c'est donc une spirale d'Archimède, dont le pole se trouve à l'origine fixe (*).

DISQUE TOURNANT DE M. LE GÉNÉRAL MORIN.

Cet appareil à été employé pour la vérification des lois du frotement, et pour l'étude du mouvement d'un chien de fusil.

On adapte un plateau à l'arbre dont on veut déterminer la vitesse angulaire Fig. 4. Un mouvement d'horlogerie fait tourner suivant le petit cercle NN′, une pointe traçante dans l'espace absolu. Si donc le plateau reste immobile, le style y marquera ce cercle; mais si le plateau marche, il tracera une certaine courbe MM′.

Dans plusieurs ouvrages qui traitent des mécanismes (**), on trouvera d'autres variétés de cet appareil. Nous nous bornerons dans ce qui suit à examiner la nature de la courbe MM′, décrite par la pointe traçante, pendant le mouvement, ainsi que plusieurs autres détails que nous n'avons pas rencontrer.

Prenons pour origine fixe le centre du plateaux O.

L'une des origines mobiles (a', b') coincide avec O, donc

$$a' = b' = o$$

l'autre (a, b) sera prise sur l'axe des x fine, mobile donnera,

(*) Voir: Problèmes de Mécanique Rationnelle, par le P. M. Jullien t. I. p. 208. édit. 1855.

(**) Voir Haton de la Goupillière, *Traité des Mécanismes, renfermant la théorie géométrique des organes, et celle des résistances passives*. p. 322.

$$b = o \qquad a = \text{const} = c$$

en désignant par c, la distance OO′, qui reste constante pendant le mouvement.

Les formules (26) (27) en y substituant les valeurs ci-dessus deviennent,

$$c + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha = x'' \cos\acute{\alpha} - y'' \sin\acute{\alpha}$$

$$x' \sin\alpha + y' \cos\alpha = x'' \sin\acute{\alpha} + y'' \cos\acute{\alpha}$$

(29)

$$f(c, o, o, o, \alpha, \acute{\alpha}) = \varphi(\alpha, \acute{\alpha}) = o$$

et l'élimination de α, $\acute{\alpha}$, donnera une équation entre x'', y'', qui sera celle du lieu relevé sur le plateau. Si l'on suppose

$$\alpha = \acute{\alpha}$$

les deux premières (29) prennent la forme

$$c = (x'' - x') \cos\alpha - (y'' - y') \sin\alpha$$

$$o = (x'' - x') \sin\alpha + (y'' - y') \cos\alpha$$

d'où

$$(30) \qquad (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 = c^2$$

par conséquent la pointe tracera sur le plateau une circonférence.

Les calculs se simplifient considérablement, lorsqu'on prend la pointe, dont les coordonnées sont $(x'\ y')$ sur l'axe des x', on aura, $y'=o$, et les équations (29) deviennent,

$$c + x' \cos\alpha = x'' \cos\acute{\alpha} - y'' \sin\acute{\alpha}$$

$$x' \sin\alpha = x'' \sin\acute{\alpha} + y'' \cos\acute{\alpha}$$

on peut remplacer encore x'', y'', par des coordonnées polaires, r'', θ'', on trouve ainsi,

$$c + x' \cos \alpha = r'' \cos (\acute{\alpha} + \theta'')$$

$$x' \sin \alpha = r'' \sin (\acute{\alpha} + \theta'')$$

ou bien

$$\cos \alpha = \frac{r''^2 - x'^2 - c^2}{2cx'}$$

(31)

$$\cos (\acute{\alpha} + \theta'') = \frac{r''^2 - x'^2 + c^2}{2cr''},$$

formules qui se prêtent mieux dans la pratique, puisque les deux angles α, $\acute{\alpha}$, dont on a surtout besoin, s'y trouvent separés.

Elles (31) contiennent quatre variables, et l'on peut se donner, au lieu de la troisième (29), une relation entre r'', θ'',

$$f(r'', \theta'') = o$$

qui sera évidemment l'équation de la courbe tracée sur le plateau; en éliminant r'', θ'', entre cette dernière et (31) on aura une relation entre α, $\acute{\alpha}$; et comme on a la valeur de α, en fonction du temps, on aura aussi $\acute{\alpha}$, en fonction de cette même variable, et par suite la vitesse angulaire de l'arbre.

Cherchons par exemple la relation qui regie les angles α, $\acute{\alpha}$, pour que la pointe décrive une ligne droite passante par le centre du plateau; on aura dans ce cas,

$$x' = c$$

puisque la pointe, doit passer par le centre du plateau; si l'on suppose en outre, que la droite, est l'axe des x'' même, on aura,

$$\theta'' = o$$

et en combinant ces dernières avec (31) on trouve après quelques réductions,

$$\alpha = 2\acute{\alpha}$$

de sorte que la vitesse angulaire de la pointe doit être double de celle du plateau.

Pour nous faire une idée nette et précise de la nature de la courbe relevée sur le plateau, nous imprimerons à l'ensemble de l'appareil un mouvement de rotation autour de l'arbre O, de manière à réduire le plateau tournant au repos; par suite de ce changement la pointe (le style) se trouvera animée de deux rotation p, q; l'une s'effectuera autour de O, et fera décrire au point O′, qui était immobile auparavant, une circonférence autour du point O, l'autre rotation q continuera à s'effectuer autour de O′. La question revient ainsi à examiner le mouvement sur le plateau qui reste immobile, d'un plan Π, dont un point décrit une circonférence. En désignant par O_1, la position du centre instantané nous aurons pour déterminer ce point,

$$\overline{OO_1} \cdot p = \overline{O_1O'} \cdot q$$

ou bien,

$$\overline{OO_1} \cdot p = (\overline{OO_1} + \overline{OO'})\, q$$

d'où

$$\overline{OO_1} = \overline{OO'} \frac{q}{p-q} \qquad (32)$$

équation fort simple, qui donne la position du point autour duquel s'effectuera la rotation resultante, et par conséquent la tangente à la courbe du plateau, lorsqu'on connaîtra les deux rotations p, q; inversement s'il s'agit de déterminer à un instant quelquonque, la rotation de l'arbre, d'après la courbe tracée sur le plateau, on menera la normale à la courbe, au point décrit à l'instant consideré, en la prolongeant jusqu'à son intersection avec la droite OO′, on aura ainsi la position approximative du centre instantané, et l'on formera dessuite l'équation (32) d'où l'on pourra tirer la valeur de p,

$$p = \frac{\overline{OO_1} + \overline{OO'}}{\overline{OO_1}}\, q$$

qui est la seul inconnue.

Si le rapport $\frac{p}{q}$, reste constant pendant toute la durée du mouvement, le centre instantané de rotation O_1, restera à une distance constante du point O, et le mouvement se reduira au roulement d'une circonference de rayon O_1O', sur une autre de rayon OO_1; la courbe relevée sur le plateau sera dans ce cas, du genre des épicycloïdes. Enfin lorsque ce rapport devient égale à l'unité, le plan sur lequel est fixée la pointe se trouvera animé d'un mouvement de *reptation*, le centre instantané passe à l'infini vers la direction OO', et tous les points décriront des circonférences non concentriques, mais de même rayon. C'est le cas $(\alpha=\alpha')$ que nous avons examiné plus haut, et l'on voit que les résultats de cette méthode synthétique, sont en parfait accord avec ceux de l'analyse.

— L'idée primitive sur laquelle s'appuit l'appareil que nous étudions, et qui d'après Bour, est due à M. le général Poncelet, a été mis à profit, pour étudier la loi de la chûte des corps.

Une bande de papier est enroulée sur un cylindre qui tourne d'un mouvement uniforme autour de son axe, pendant qu'une pointe, tombe sous l'action de la pesanteur le long d'une génératrice. Le hauteurs y, de la pointe étant données en fonction du temps par la formule,

$$y = \tfrac{1}{2} gt^2$$

et les abscisses se succédant d'un mouvement uniforme,

$$x = at$$

il est évident qu'on aura,

$$x^2 = \frac{2a^2}{g} y$$

équation d'une parabole, qu'on trouvera sur le papier après le déroulement.

Remarque. Il serait peut être plus commode d'employer



